ビルディング・キューブ法を用いた非定常流トポロジー最適化手法の開発と性能評価

研究代表者： 勝又 稜平[1]

[1] 名古屋大学 大学院工学研究科 土木工学専攻

1. 緒言

トポロジー最適化は，数理的な理論に基づき最適な形状を求める構造最適化手法の一種である．トポロジー最適化を流体問題に適用することで，例えばエネルギー散逸の最小化 (1) のような，所望の性能に対して最適な流路形状を見出すことが可能である．しかし，トポロジー最適化では，各最適化ステップにおいて支配方程式を解く必要があり，特に非定常流れのトポロジー最適化では膨大な計算コストを要する．そのため，多くの既往研究は定常状態や 2 次元問題に限定されており，詳細な計算メッシュを用いた非定常 3 次元流れのトポロジー最適化例は極めて少ない．

一方，大規模問題に対し，CPU のハイブリッド並列計算で良好な並列化効率を誇る手法の一つとして，階層型直交メッシュ法の一種であるビルディング・キューブ法 (2) が提案されている．高い並列化効率を実現でき，計算メッシュの局所細分化も容易であることから，既往研究では，流体問題や流体-構造連成問題 (3) に適用されている．

本研究では，ビルディング・キューブ法（BCM）に着目し，超並列計算に適した非定常流トポロジー最適化手法を提案する．流体粘性によるエネルギー散逸を目的関数とし，その感度解析は連続随伴変数法に基づいて行われる．トポロジー最適化における非定常ナビエ・ストークス方程式および随伴方程式は，BCM に基づくセル中心有限体積法により離散化する．数値計算例を通して，提案手法の大規模問題への適用可能性について検証する．

2. 数値計算手法

2.1 支配方程式と最適化問題設定

位置 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ および時刻 $t \in [0, T]$ における速度，圧力をそれぞれ $\boldsymbol{u}$，p とし，非定常・非圧縮性流れに対するトポロジー最適化問題を以下のように設定する．

$$\min \quad J(\boldsymbol{u}, p; \gamma) \tag{1}$$

$$\text{s.t.} \quad \rho \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} + \rho (\boldsymbol{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{u} = -\nabla p + \mu \nabla \cdot \left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^{\top} \right] - \alpha \boldsymbol{u} \tag{2}$$

$$-\nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0 \tag{3}$$

$$G(\gamma) = \frac{1}{V_0} \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \gamma \, \mathrm{d}\Omega \leq \theta \tag{4}$$

ここで，ρ は質量密度，μ は粘性係数である．$J(\boldsymbol{u}, p; \gamma)$ は目的関数，$G(\gamma)$ は体積制約関数であり，$V_0 = \int_{\Omega_{\mathrm{D}}} \mathrm{d}\Omega$ は設計領域 Ω_{D} の体積，$\theta \in (0, 1]$ は流体領域の体積割合上限である．α は固体を含む領域を多孔質体として仮定したときの透過抵抗係数であり，各計算セルの流体体積率を表す最適化設計変数 $\gamma(\boldsymbol{x}) \in [0, 1]$（$\gamma = 0$ のとき固体，$\gamma = 1$ のとき流体）を用いて次式で表される．

$$\alpha(\gamma) = \alpha_{\min} + (\alpha_{\max} - \alpha_{\min}) \frac{q(1 - \gamma)}{q + \gamma} \tag{5}$$

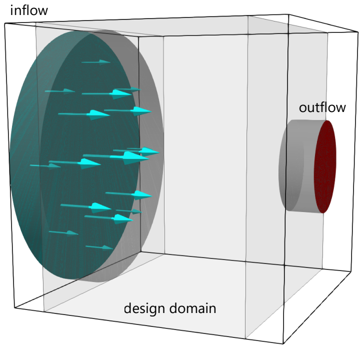

Fig.1: 最適化における流入・流出条件および設計領域

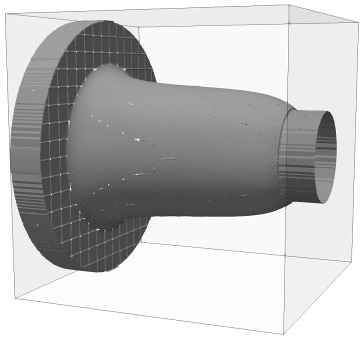
Fig.2: 最適化された流路形状

ここで，$\alpha_{\min}$，$\alpha_{\max}$ はそれぞれ α の最小値，最大値であり，$q\,(>0)$ は式 (5) で表される α の補間関数において，凸性を制御するためのパラメータである．目的関数 J は，本論文においては抵抗力および流体粘性によるエネルギー散逸とし，以下のように設定する．

$$J(\boldsymbol{u}, p; \gamma) = \int_0^T \int_\Omega \alpha\, \boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{u}\, \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t + \int_0^T \int_\Omega \frac{\mu}{2} \left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^\top\right] : \left[\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^\top\right] \mathrm{d}\Omega \mathrm{d}t \tag{6}$$

2.2 BCM に基づくセル中心有限体積法

Building-cube 法（BCM）は階層型直交メッシュ法の一種である．計算領域は「キューブ」と呼ばれる立方体領域に分割され，各キューブは等間隔で同数のセルにさらに分割される．並列計算の際，各計算コアには同数のキューブが割り当てられ，各キューブ内で空間ループ処理が実行される．これにより，各コアは同数のセルを分担することになるため，各コアの計算負荷が均一となる．さらに，簡素なデータ構造により，メモリアクセスが局所的かつ連続的になりやすい．このような計算負荷の均一化やメモリアクセスの局所化・連続化により，BCM では高い並列化効率を得ることが可能である．

3. 数値計算例

本手法の大規模計算への有用性を検証するため，Fig.1 における条件でトポロジー最適化を行った．計算領域を 4096 キューブ・約 1700 万セルにメッシュ分割し，512MPI ランク × 8OpenMP スレッドのハイブリッド並列計算によって，Fig.2 に示す最適化結果が得られた．これにより，本手法が大規模な非定常問題においてもトポロジー最適化計算が可能であることが示された．

4. 結言

本研究では，ビルディング・キューブ法（BCM）を用いた非定常流トポロジー最適化手法を提案し，その有用性を検証した．今後の研究では，提案手法のより詳細な計算効率について検証する予定である．

参考文献

(1) Borrvall, T. and Petersson, J., Topology optimization of fluids in Stokes flow, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, **41**-1, 2003, pp. 77–107.

(2) Nakahashi, K., Building-Cube Method for Flow Problems with Broadband Characteristic Length, *Computational Fluid Dynamics 2002: Proceedings of the Second International Conference on Computational Fluid Dynamics, ICCFD, Sydney, Australia, 15–19 July 2002*, pp. 77–81, Springer, 2003.

(3) Nishiguchi, K., Bale, R., Okazawa, S., and Tsubokura, M., Full eulerian deformable solid-fluid interaction scheme based on building-cube method for large-scale parallel computing, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **117**-2, 2019, pp. 221–248.