差分法の実習：課題

松元亮治・福田尚也

2002 年 9 月 9 日

1　1 次元波動方程式

スカラー方程式の差分解法のパッケージを実習テキスト (p273 から p282) に沿って動かしなさい。サンプルプログラムは、FTCS スキームを用いて、1 次元波動方程式を計算するものである。初期条件は、$j = 1, ...50$ に対して $u_j = 1$、$j = 51, ...100$ に対して $u_j = 0$、クーラン数 $\nu = c\Delta t/\Delta x = 0.25$ として計算をおこなう。このプログラムを

1. Lax-Wendroff 法によるもの、
2. 空間 1 次精度の風上差分によるもの、
3. 流束制限関数として minmod 関数を用いたもの

に書きかえ、計算結果をグラフ表示し、テキストの結果 (図 1.12, 図 1.10) と比較しなさい。

補足解説

1 次元波動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

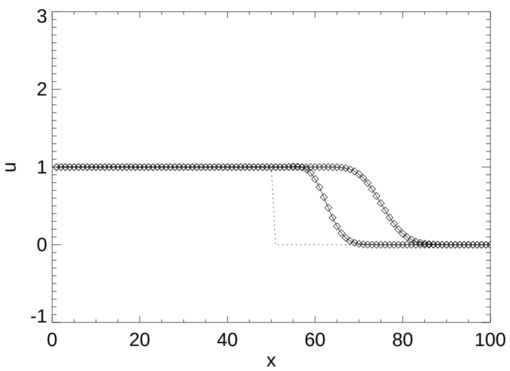
を差分化すると

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta x}(f_{j+1/2}^n - f_{j-1/2}^n) \tag{2}$$

となる。ここで、FTCS スキームの数値流束を用いると

$$f_{j+1/2}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1} + f_j) = \frac{1}{2}c(u_{j+1} + u_j) \tag{3}$$

となる。数値流束に関しては p21 にまとめられており、これを用いるとよい。変更箇所に関しての解説は p276 に記されている。



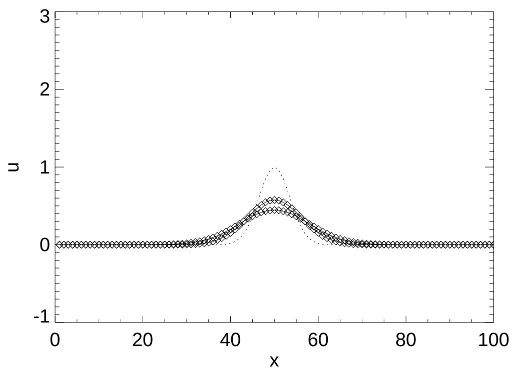


図 1: 計算結果。左：Lax-Wendroff 法+流束制限関数。右：1 次元拡散方程式。

2　Burgers 方程式

1 次元波動方程式のプログラムを参考にして Burgers 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{u^2}{2}\right) = 0 \tag{4}$$

を 1 次精度風上差分法を用いて解くプログラムを作成し、結果をグラフ表示し、テキストの結果 (図 1.15, 図 1.16) と比較しなさい。数値流束に関しては p23 にかかれている。

$$f^n_{j+1/2} = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{{u_{j+1}}^2}{2} + \frac{{u_j}^2}{2}\right) - \frac{1}{2}|u_{j+1} + u_j|(u_{j+1} - u_j)\right\} \tag{5}$$

と書くこともできる。

3　1 次元拡散方程式

1 次元波動方程式のプログラムを参考にして 1 次元拡散方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \kappa\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{6}$$

を FTCS スキームを用いて解くプログラムを作成し、適当な初期条件を設定してシミュレーションを行い、結果をグラフ表示しなさい。

例えば、初期の分布にはガウス分布を仮定し、cs の代わりに kappa を定義しましょう。

```
c  variable
      do j=1,jx
         u(j)= exp(-(((x(j)-x(jx/2))/5.)**2))
      enddo
c
c  kappa
      kappa=1.0
```