

第2章 システム方程式の解法

富阪幸治（国立天文台）

第1章では、線形、非線形の一変数の波動方程式の数値解法について学んだ。ここでは、流体力学、磁気流体力学の方程式系について学び、ここにあらわれる非線系連立方程式の解法が第1章のそれと同じようにして得られることを示す。

2.1 基礎方程式

ここでは、まず流体力学の基礎方程式を導出する。その後、磁場の効果を考慮し、磁気流体力学の基礎方程式を得る。

2.1.1 質量

まず最初の基礎方程式は、ある体積の中に含まれる流体の質量が単位時間に流れ込む質量流速によって増減するという連続の式

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = - \int_S \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.1)$$

から得られる。これに Gauss の定理

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div} \mathbf{E} dV \quad (2.2)$$

を用いて右辺を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \mathbf{v}) dV = 0 \quad (2.3)$$

が得られる。この式は空間中にある体積を固定した時にその内部に含まれる質量の保存を表す式である。

V として微小体積を考えれば、微分形で表した質量保存の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.4)$$

が得られる。

2.1.2 運動量

つぎに、ある体積の中に含まれる流体の運動量は、質量と同じように、単位時間に流れ込む運動量流束によって増減するが、それに加えて運動量の場合は、この流体の体積に加わっている「力」によっても増減する。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \mathbf{v} dV = - \int_S \rho \mathbf{v} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}) dS - \int_S p \mathbf{n} dS + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.5)$$

右辺第2項は、表面に加わる力で、ここでは圧力による運動量変化を表している。第3項は体積力で、ここでは重力 $\rho \mathbf{g}$ ($\mathbf{g}$ は重力加速度) による運動量変化を表している。もう一つの Gauss の定理

$$\int_S f \mathbf{n} dS = \int_V \text{grad} f dV \quad (2.6)$$

を用いて右辺第2項を体積積分に変換すると、

$$\int_V \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} dV + \int_V \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) dV = - \int_V \text{grad} p dV + \int_V \rho \mathbf{g} dV \quad (2.7)$$

ここで V として微小体積を考えれば、

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g} \quad (2.8)$$

が得られる。 $\rho \mathbf{v} \mathbf{v}$ はテンソル積で

$$\rho \mathbf{v} \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \rho v_x v_x & \rho v_x v_y & \rho v_x v_z \\ \rho v_y v_x & \rho v_y v_y & \rho v_y v_z \\ \rho v_z v_x & \rho v_z v_y & \rho v_z v_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

をあらわす。この式は添字をつけて書くと、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \quad (2.10)$$

と書ける。もちろん、 $x_1 = x$ 、 $x_2 = y$ 、 $x_3 = z$ を表している。

2.1.3 エネルギー

エネルギーの保存を考える。単位体積あたりの全エネルギー e は運動エネルギーと内部エネルギー ϵ の和で

$$e = \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 + \epsilon \quad (2.11)$$

理想気体の場合、単位質量あたりの内部エネルギーは温度に比例するので、単位体積あたりのそれは温度×密度に比例し、 $\epsilon = p/(\gamma - 1)$ (γ は気体の比熱比) とかける。質量と同じように、全エネルギーの増減はエネルギー流束によるだけなら、 $\partial e / \partial t + \text{div}(e \mathbf{v}) = 0$ となるはずであるが、そうではない

熱力学の第1法則で断熱の場合を考えると、内部エネルギー U と体積 V は

$$\frac{dU}{dt} + p \frac{dV}{dt} = 0 \quad (2.12)$$

という関係で変化する。これは次のように書き換えられる。

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV + p \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = 0, \quad (2.13)$$

第2項を変形するのに、単位時間あたりの体積変化が $(\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS$ の積分に比例することを用いた。ここで、第1項の時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーでなく、時間 $t = 0$ で体積 $V(t = 0)$ にあった物質の時間 $t > 0$ での体積 $V(t)$ に含まれる内部エネルギーの時間変化（ラグランジェによる微分と呼ぶ）を表していることに注意し、時間微分が空間に固定された体積に含まれる内部エネルギーの時間変化（オイラーによる微分と呼ぶ）に書き換える。

$$\frac{d}{dt} \int_V \epsilon dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS, \quad (2.14)$$

であるから、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \epsilon dV + \int_S \epsilon (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS = -p \int_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v}) dS \quad (2.15)$$

となる。この微分形として、単位体積あたりの熱エネルギー ϵ は

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \operatorname{div}(\epsilon \mathbf{v}) = -p \operatorname{div} \mathbf{v} \quad (2.16)$$

という関係にしたがって変化することが簡単な計算でわかる。これと式 (2.8) から得られる運動エネルギーの変化を表す（この式の右辺が単位体積・単位時間に流体素片になされた仕事を表すことに注意）

$$\frac{\partial \rho |\mathbf{v}|^2 / 2}{\partial t} + \operatorname{div} \left(\frac{\rho |\mathbf{v}|^2}{2} \mathbf{v} \right) = -\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} p + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g}, \quad (2.17)$$

の和をとれば全エネルギーに関する方程式が得られる。断熱の場合のエネルギーに関する方程式は、

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div} [(e + p) \mathbf{v}] = \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{g} \quad (2.18)$$

ここで e は単位体積あたりの全エネルギーで

$$e = \rho |\mathbf{v}|^2 / 2 + \epsilon \quad (2.19)$$

流体力学の基礎方程式は、式 (2.4)、(2.8) および (2.18) である。このようにして得られた、流体力学の基礎方程式は、ガリレイ変換不変であることに注意しておこう。

2.1.4 磁気流体力学

磁場の効果を取り入れよう。ローレンツ力を外力として加えると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\mathbf{j} \times \mathbf{B} &= -\frac{1}{4\pi}\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B}), \\ &= -\nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B},\end{aligned}\tag{2.20}$$

だから、式 (2.8) は

$$\frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) = -\text{grad} p + \rho \mathbf{g} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) + \frac{1}{4\pi}(\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{B}\tag{2.21}$$

もしくは、流束の項に Maxwell の応力テンソルを加える形にして、

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_j + p \delta_{ij} - \frac{1}{4\pi} B_i B_j + \frac{1}{8\pi} B^2 \delta_{ij}) = \rho g_i\tag{2.22}$$

のように書き直せる。またエネルギー方程式は、エネルギーに磁場のエネルギーを加え、流束にポインティングベクトルを加えることによって、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(e + \frac{B^2}{8\pi} \right) + \nabla \cdot \left[(e + p) \mathbf{v} + \frac{1}{4\pi} \{ \mathbf{B} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \} \right] = 0\tag{2.23}$$

のようになる。

さらに、電磁気学のファラデーの法則

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\tag{2.24}$$

とアンペールの法則

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{j}\tag{2.25}$$

オームの法則

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\tag{2.26}$$

から磁場の誘導方程式

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma} \nabla^2 \mathbf{B}\tag{2.27}$$

が得られる。ここで、電気伝導度 $\sigma \rightarrow \infty$ を完全磁気流体力学極限とよぶ。

これから、磁気流体力学の基礎方程式は、式 (2.4)、(2.21) もしくは (2.22)、(2.23) と (2.27) になる。

2.1.5 保存形式

流体力学の基礎方程式をまとめると、以下のようになる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} = 0, \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x^2 + p}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_x v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_x v_z}{\partial z} = \rho g_x, \quad (2.29)$$

$$\frac{\partial \rho v_y}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_y v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y^2 + p}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_y v_z}{\partial z} = \rho g_y, \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial \rho v_z}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_z v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_z v_y}{\partial y} + \frac{\partial \rho v_z^2 + p}{\partial z} = \rho g_z, \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial (e + p)v_x}{\partial x} + \frac{\partial (e + p)v_y}{\partial y} + \frac{\partial (e + p)v_z}{\partial z} = \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z), \quad (2.32)$$

ここで、体積力の外力が働いていない（通常の流体力学が主に対象とする）場合は密度、運動量密度、全エネルギー密度は、それらの流束の発散で与えられる。このため、このような形式の基礎方程式を保存形式と呼ぶ。

これは、保存量

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ \rho v_y \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

に対して、その x 方向、 y 方向、 z 方向に流れる流束、

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ \rho v_x v_y \\ \rho v_x v_z \\ (e + p)v_x \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_y \\ \rho v_y v_x \\ \rho v_y^2 + p \\ \rho v_y v_z \\ (e + p)v_y \end{bmatrix}, \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_x \\ \rho v_z v_y \\ \rho v_z^2 + p \\ (e + p)v_z \end{bmatrix}, \quad (2.34)$$

を用いて、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.35)$$

$\mathbf{S}$ はソース項で体積力である重力のみが働いている時は

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \rho g_x \\ \rho g_y \\ \rho g_z \\ \rho(v_x g_x + v_y g_y + v_z g_z) \end{bmatrix}, \quad (2.36)$$

のように与えられる。

2.2 円筒座標、球座標

軸対称、球対称などの対称性を持つ問題については、空間の独立変数の数（次元）を減らすことにより、計算量を減少させる。そのため、1次元球対称の場合の球座標や、2次元軸対称の場合の円筒座標で書いた基礎方程式を見ておくことにする。

2.2.1 1次元球対称

1次元球対称の場合は、基礎方程式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \rho v_r}{\partial r} = 0, \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \rho v_r}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 \rho v_r^2}{\partial r} = -\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (2.38)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial r^2 (e + p) v_r}{\partial r} = 0, \quad (2.39)$$

であるが、 r^2 を掛けた量を保存量と流束にとることによって

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{U})}{\partial r} = \bar{S}(\bar{U}), \quad (2.40)$$

$$\bar{U} = r^2 \mathbf{U} = r^2 \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ e \end{pmatrix}, \bar{F} = r^2 \mathbf{F} = r^2 \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ (e + p) v_r \end{bmatrix}, \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2rp \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.41)$$

2.2.2 2次元軸対称円筒座標

2次元軸対称の問題を円筒座標 (z, r) を用いて解く場合は良く行なわれる。円筒座標 (z, r) について考えると、 $\text{div} \mathbf{A}$ が $\partial A_x / \partial x + \partial A_y / \partial y$ から $(1/r) \partial (r A_r) / \partial r + \partial A_z / \partial z$ などの表式が変わるので流束とソース項がデカルト座標のそれとは違うことになる。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial r} + \frac{\partial \mathbf{G}(\mathbf{U})}{\partial z} = \mathbf{S}(\mathbf{U}), \quad (2.42)$$

について、

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_r \\ \rho v_z \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 + p \\ \rho v_r v_z \\ (e + p) v_r \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} \rho v_z \\ \rho v_z v_r \\ \rho v_z^2 + p \\ (e + p) v_z \end{bmatrix}, \mathbf{S} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho v_r^2 \\ \rho v_r v_z \\ v_r (e + p) \end{bmatrix}, \quad (2.43)$$

もう一つの方法は保存量、流束に r を掛けた量を用いると、

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{F}(\bar{U})}{\partial r} + \frac{\partial \bar{G}(\bar{U})}{\partial z} = \bar{S}(\bar{U}), \quad (2.44)$$

について、

$$\bar{U} = rU, \bar{F} = rF, \bar{G} = rG, \bar{S} = \begin{pmatrix} 0 \\ p \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.45)$$

2.3 波動

一次元の流体力学を考える。基礎方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.46)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e + p)v_x \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

であるが、ここでは特にエントロピー一定のガスに対する1次元流体力学を考える。エントロピー一定でなくとも $p = p(\rho)$ のように圧力が密度だけに依存して変化するバロトロピー気体でも議論は同じである。エネルギー保存に関する e の変化を考える第3成分の式はポアッソンの関係式 $p = K\rho^\gamma$ (バロトロピー気体なら $p = p(\rho)$) で置き換えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F(U)}{\partial x} = 0, \quad (2.48)$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \end{pmatrix}, \quad (2.49)$$

この2本の式と $p = K\rho^\gamma$ で方程式系が閉じることは容易にわかる。

ここで、 $\frac{\partial p}{\partial x} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{ad}} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x}\right) = c_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial x}$ ($\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{\text{ad}} = c_s^2$ にあられる c_s を音速と呼ぶ) であることに注意して、上の式を書き直すと

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} = 0, \quad (2.50)$$

$$\frac{\partial \rho v_x}{\partial t} + \frac{\partial \rho(v_x^2 + c_s^2)}{\partial x} = 0, \quad (2.51)$$

となる。

2.3.1 線形的气体ダイナミクス

系が一様 (密度 ρ_0) で静止 (速度 $v_x = 0$) しており、変化が微小である場合 ($|\delta\rho| \ll \rho_0$ 、 $|v_x| \ll c_s$)、式 (2.51) は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (2.52)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{c_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.53)$$

となる。

これは昨日学んだ移流方程式のように書き直すと

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \end{pmatrix} = 0 \quad (2.54)$$

のようになる。ここで出てくる行列 $\mathbf{A}$ を対角化することを考える。

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & \rho_0 \\ c_s^2/\rho_0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.55)$$

の固有値を求めると二つの相異なる実固有値は $\lambda_1 = -c_s$ 、および $\lambda_2 = +c_s$ であること、また行列 $\mathbf{A}$ を対角行列

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

に対角化するには、行列 $\mathbf{A}$ の固有値 λ_i とその固有値に属する行列 $\mathbf{A}$ の右固有ベクトル $\mathbf{r}^{(i)}$ を用いると、

$$\mathbf{A} \mathbf{r}^{(i)} = \lambda_i \mathbf{r}^{(i)}, \quad (2.57)$$

($\mathbf{r}^{(i)}$ は縦ベクトル $(\alpha, \beta)^t$)。また、その固有値に属する行列 $\mathbf{A}$ の左固有ベクトル $\ell^{(i)}$ を用いると、

$$\ell^{(i)} \mathbf{A} = \lambda_i \ell^{(i)}, \quad (2.58)$$

($\ell^{(i)}$ は横ベクトル (γ, δ)) で、

$$\ell^{(i)} \mathbf{A} \mathbf{r}^{(i)} = \lambda_i, \quad (2.59)$$

と書ける。これを、 $i = 1, 2$ について両方考える。つまり、右固有ベクトルを横に並べて作った右固有行列

$$\mathbf{R} = (\mathbf{r}^{(1)}, \mathbf{r}^{(2)}) \quad (2.60)$$

および、左固有ベクトルを縦に並べて作った左固有行列

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \ell^{(1)} \\ \ell^{(2)} \end{pmatrix}, \quad (2.61)$$

を用いると、

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R}, \quad (2.62)$$

もしくは、

$$\mathbf{A} = \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L}, \quad (2.63)$$

のように対角化されることがわかる。もちろん、 $\ell^{(i)} \cdot \mathbf{r}^{(j)} = \delta_{ij}$ であるから、 $\mathbf{L}\mathbf{R} = \mathbf{I}$ で $\mathbf{L}$ と $\mathbf{R}$ は逆行列の関係にある。 $\mathbf{R}$ 、 $\mathbf{L}$ を具体的に書くと、

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \rho_0 & \rho_0 \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad (2.64)$$

また

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2c_s\rho_0} \begin{pmatrix} c_s & -\rho_0 \\ c_s & \rho_0 \end{pmatrix}, \quad (2.65)$$

である。これは、式 (2.54) が以下のように書き直せることを意味する。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{R}\mathbf{\Lambda}\mathbf{L}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0. \quad (2.66)$$

ここで、行列 $\mathbf{R}$ 、逆行列 $\mathbf{L}$ が一定であり 微分演算と交換することを用いると、この式は、以下のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{L}\mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{\Lambda}\frac{\partial \mathbf{L}\mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.67)$$

すなわち、 $\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{L}(\rho, v_x)^t = (w_1, w_2)^t$ という新しい変数に対しては、基礎方程式は独立な二つの式に分解できることがわかる。

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} - c_s \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial t} + c_s \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0 \quad (2.68)$$

$t = 0$ での w に対する初期条件は u に対するそれから $w(x, t = 0) = \mathbf{L}u(x, t = 0)$ のようにして求められ、移流方程式はその $w(x, t = 0)$ の値を w_1^0 は左へ、 w_2^0 は右へ、速度 c_s で移動させて行く。すなわちこの解は、

$$\begin{aligned} w_1(x, t) &= w_1(x + c_s t, 0), \\ &= \mathbf{L}u(x + c_s t, 0), \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c_s} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)], \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$\begin{aligned} w_2(x, t) &= w_2(x - c_s t, 0), \\ &= \mathbf{L}u(x - c_s t, 0), \\ &= \frac{1}{2\rho_0 c_s} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)], \end{aligned} \quad (2.70)$$

最後に、この解を、 $\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{W}$ で逆変換すれば、 ρ 、 v_x の時間発展が得られ、

$$\begin{aligned} \rho(x, t) &= \rho_0 w_1(x, t) + \rho_0 w_2(x, t), \\ &= \frac{1}{2c_s} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)] \\ &\quad + \frac{1}{2c_s} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)], \end{aligned} \quad (2.71)$$

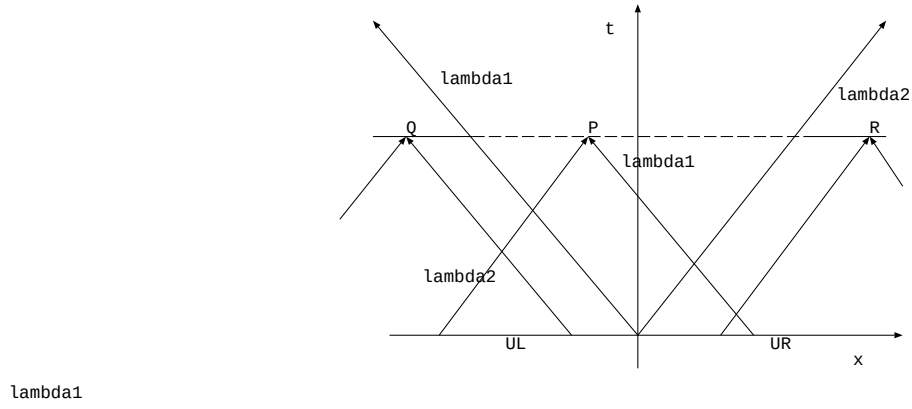


図 2.1: 特性線によって分けられた領域ごとに、いずれの初期値の影響下にあるかがわかる。

$$\begin{aligned}
 v_x(x, t) &= -c_s w_1(x, t) + c_s w_2(x, t), \\
 &= -\frac{1}{2\rho_0} [c_s \rho(x + c_s t, 0) - \rho_0 v_x(x + c_s t, 0)] \\
 &\quad + \frac{1}{2\rho_0} [c_s \rho(x - c_s t, 0) + \rho_0 v_x(x - c_s t, 0)], \tag{2.72}
 \end{aligned}$$

のように得られる。

2.3.2 Riemann 問題

線形ガスダイナミクス方程式のような定係数の双曲型方程式系の初期値問題で初期値に存在した不連続が進化する形の解を考える。つまり、

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \tag{2.73}$$

初期条件

$$\mathbf{U}(x, t = 0) = \begin{cases} \mathbf{U}_L, & x < 0 \\ \mathbf{U}_R, & x > 0 \end{cases}, \tag{2.74}$$

のようなものである。式 (2.71)、(2.72) から、図 2.1 で、点 P、Q、R は影響を受ける初期状態 $\rho(x \pm c_s t, t = 0)$ 、 $v_x(x \pm c_s t, t = 0)$ が $\mathbf{U}_L$ であるか $\mathbf{U}_R$ であるかが異なっている。

すなわち、点 P は右に進む音波 $\lambda_2 = +c_s$ では $\mathbf{U}_L$ と、左に進む音波 $\lambda_1 = -c_s$ では $\mathbf{U}_R$ に影響を受けており、点 Q は右に進む音波でも左に進む音波でも $\mathbf{U}_L$ に影響を受けており、点 R は右に進む音波でも左に進む音波でも $\mathbf{U}_R$ に影響を受けていることがわかる。

$\mathbf{U} = \mathbf{R}\mathbf{W}$ という関係は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U}(x, t) &= \sum_{i=1}^2 w_i(x, t) \mathbf{r}^{(i)}, \\
 &= \sum_{i=1}^2 w_i(x - \lambda_i t, t = 0) \mathbf{r}^{(i)}, \tag{2.75}
 \end{aligned}$$

と書き直せる。ここで、 $\mathbf{r}^{(i)}$ は λ_i に属する右固有ベクトルを表している。

同様に、初期状態 $\mathbf{U}_L$ と $\mathbf{U}_R$ を λ_i に属する固有ベクトルで展開すると

$$\mathbf{U}_L = \sum_{i=1}^2 \alpha_i \mathbf{r}^{(i)}, \quad \mathbf{U}_R = \sum_{i=1}^2 \beta_i \mathbf{r}^{(i)} \quad (2.76)$$

となるが、図 2.1 で点 Q の属する領域では $\mathbf{U}_L = \alpha_1 \mathbf{r}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{r}^{(2)}$ であり、また、点 R の属する領域では $\mathbf{U}_R = \beta_1 \mathbf{r}^{(1)} + \beta_2 \mathbf{r}^{(2)}$ であるが、点 P の属する領域では $\mathbf{U}_* = \beta_1 \mathbf{r}^{(1)} + \alpha_2 \mathbf{r}^{(2)}$ となる。

ここで、注意すべき点は、この Riemann 問題で、左から右へ λ_1 で伝搬する特性線を越えると、 $\Delta \mathbf{U} = (\beta_1 - \alpha_1) \mathbf{r}^{(1)}$ だけ変化し、またさらに λ_2 で伝搬する特性線を越えると、 $\Delta \mathbf{U} = (\beta_2 - \alpha_2) \mathbf{r}^{(2)}$ だけ値が変化するということである。

2.3.3 非線形的气体ダイナミクス

バーガーズ方程式

ここまでの例では、定数係数の行列 $\mathbf{A}$ は一定値の特性スピード $\pm c_s$ を与えたため、すべての特性線は同じ傾きを持ち、同じ種類の特性線が交わることはなかった。

非線形の代表選手として非粘性バーガーズ方程式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2/2}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} &= 0, \end{aligned} \quad (2.77)$$

を学んだ。ここでは行列 $\mathbf{A}$ に相当するものは u となるから、一つだけ存在する特性スピード λ が空間、時間によって異なり、 $d\lambda(u)/du > 0$ であることがわかる (convex flux)。

振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつたって来る。最終的に後ろから来た特性線が前からのものに追いつくところでは物理量が不連続になり実存の気体中では衝撃波を生じる。実際の衝撃波では、ここまで考慮していなかった熱伝導、粘性などの輸送現象が重要になって気体の平均自由行程程度で物理状態が変化するがその平均自由行程程度より大きな通常の気体のスケールで考えれば物理量が不連続になるように見える。

等温ガス

式 (2.51) で音速を一定とすると、等温ガスに対する基礎方程式が得られる。ここで $\rho u = m$ と書いて従属変数を

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

と書き直すと、流束の方はこれらを使って

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} m \\ a^2 \rho + \frac{m^2}{\rho} \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

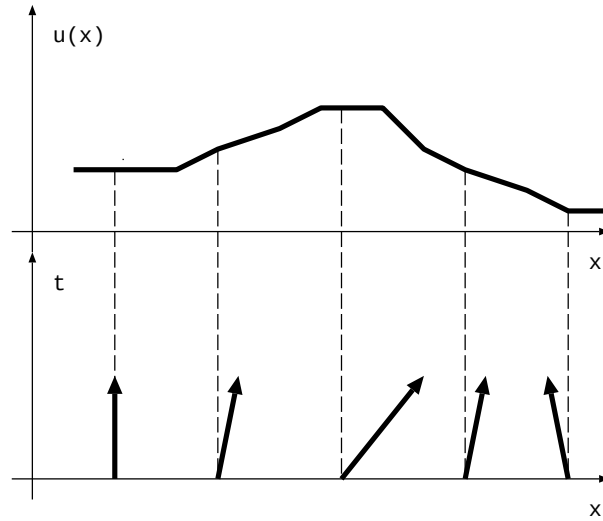


図 2.2: 非粘性バーガーズ方程式の波形（上）と特性線の傾き（下）の関係。振幅の大きな部分が早い特性スピードを持ち次第に波形がつたって来る。

のように書ける。音速の値が一定であることを強調するためにここでは $c_s = a$ と書いておくことにする。次に、基礎方程式を移流方程式型に書き換えると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a^2 - \frac{m^2}{\rho^2} & \frac{2m}{\rho} \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ m \end{pmatrix} = 0, \quad (2.80)$$

のようになる。

この式は線形的气体ダイナミクス方程式で行なったのと同じ方法で対角化を行なうことができ、 A のこの固有値は

$$\lambda_1 = \frac{m}{\rho} - a = u - a, \quad (2.81)$$

$$\lambda_2 = \frac{m}{\rho} + a = u + a, \quad (2.82)$$

であることがわかる。それぞれの固有値に属する固有ベクトルは、

$$\mathbf{r}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u - a \end{pmatrix}, \mathbf{r}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ u + a \end{pmatrix}, \quad (2.83)$$

なので、対角化する行列は

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ u - a & u + a \end{pmatrix}, \mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{u+a}{2a} & -\frac{1}{2a} \\ -\frac{u-a}{2a} & \frac{1}{2a} \end{pmatrix}, \quad (2.84)$$

で、

$$\mathbf{L} \mathbf{A} \mathbf{R} = \mathbf{\Lambda}, \quad \mathbf{R} \mathbf{\Lambda} \mathbf{L} = \mathbf{A}, \quad (2.85)$$

のように対角化される。

2.4 衝撃波

非粘性バーガーズ方程式に関してリーマン問題を考える。ここでは簡単のために $u > 0$ の場合のみを考えるが、 $u < 0$ の場合についても容易に理解できよう。

初期条件で左右の物理量の値の差が小さい場合は、 $u_R > u_L$ であっても $u_R < u_L$ であっても図 2.4 下に見るように、物理量の不連続は、 u で右に伝搬する。ところが、不連続が非線形の場合には、(1) 初期に $U_L = u_L$ 、 $U_R = u_R$ で $u_L > u_R$ である場合は、 $x < 0$ からでる特性線が $x > 0$ からでる特性線に追い付くことになる。 u_L を運んでくる波と u_R を運んでくる波が同じ点に到達するので不連続が発生する (図 2.3 上)。流体力学の場合この不連続は衝撃波と呼ばれる。

その逆に、(2) $u_L < u_R$ である場合 (図 2.3 下、図 2.4 上右) は、 u_L と u_R の間の不連続が同様に右へ伝搬して行く可能性があるが、このような、特性線の重なりによらない不連続の生成は物理的には起こり得ず、また、流体力学で生ずる衝撃波に当てはめると不連続を前面から後面に通り過ぎる間に気体のエントロピーが減少する場合に相当しており、物理的には起こり得ない (エントロピー条件)。

$u_L < u_R$ である場合は、希薄波と呼ばれる構造が出現し、位相空間で希薄波の Head と示された点から希薄波の Tail と示された点まで u の値が線形に変化しそれに応じて特性線の傾きも次第に変化する流れを生ずる。

2.4.1 ランキン・ユゴニオ関係

保存系の流体力学の 1 次元の基礎方程式

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (2.86)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho v_x \\ e \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \rho v_x \\ \rho v_x^2 + p \\ (e + p)v_x \end{bmatrix}, \quad (2.87)$$

を、空間の決まった 2 点 x_L から x_R まで積分する。その間に衝撃波を含みその位置 $x_S(t)$ は時間とともに速度 $V = dx_S(t)/dt$ で移動するとする。

$$\frac{d}{dt} \int_{x_L}^{x_S} \mathbf{U}(x, t) dx + \frac{d}{dt} \int_{x_S}^{x_R} \mathbf{U}(x, t) dx = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)), \quad (2.88)$$

のようになる。左辺を書き換えると、

$$[\mathbf{U}(x_{S_L}) - \mathbf{U}(x_{S_R})] V + \int_{x_L}^{x_S} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} dx + \int_{x_S}^{x_R} \frac{\partial \mathbf{U}(x, t)}{\partial t} dx = \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_L, t)) - \mathbf{F}(\mathbf{U}(x_R, t)), \quad (2.89)$$

となる。ここで、 $\mathbf{U}(x_{S_L})$ は衝撃波面へ左から近付いた $x = x_S - \epsilon$ ($\epsilon > 0$) での値、 $\mathbf{U}(x_{S_R})$ は衝撃波面へ右から近付いた $x = x_S + \epsilon$ での値を表す。左辺の 2 つの積分は $x_L \rightarrow x_S$ 、 $x_R \rightarrow x_S$

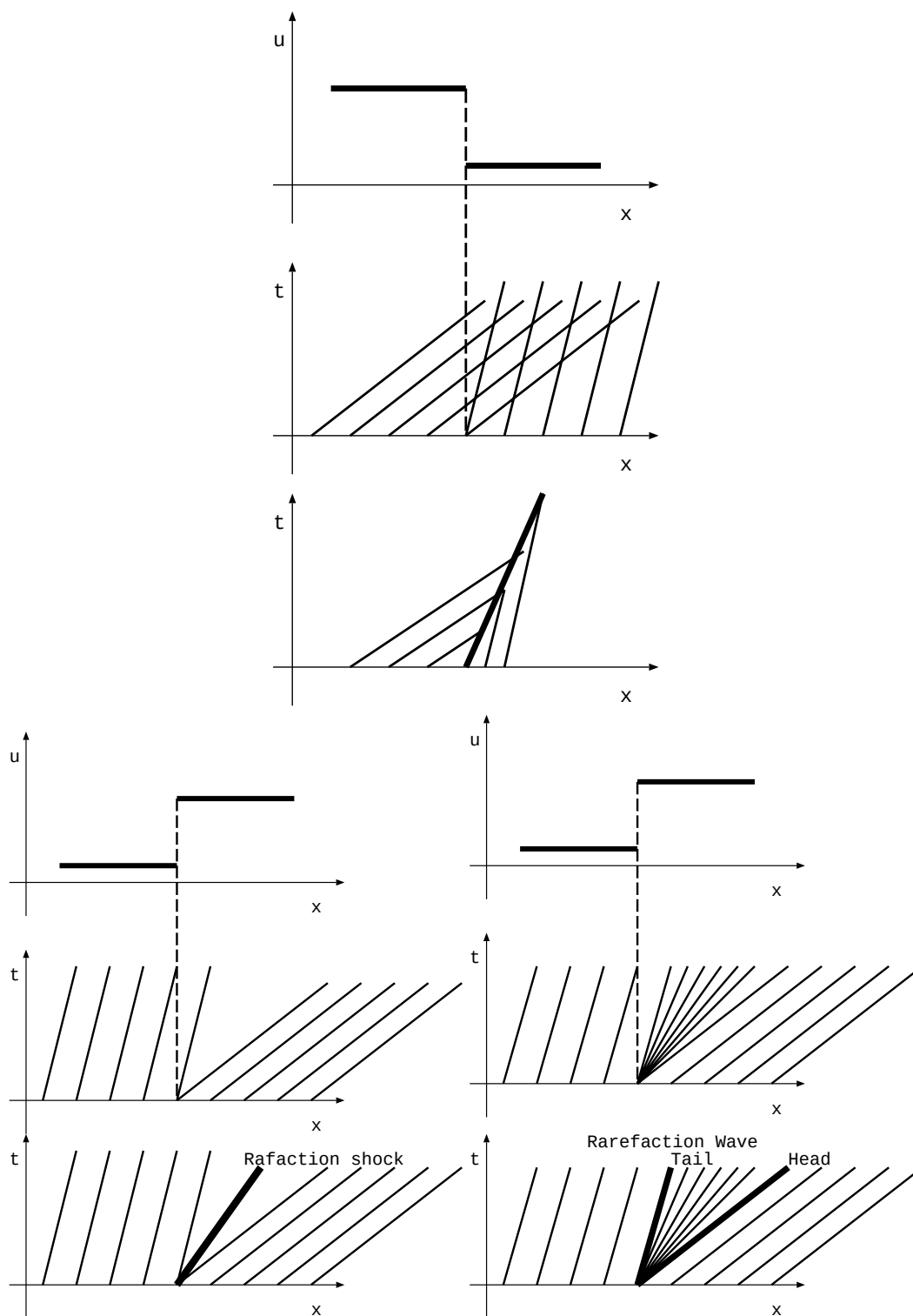


図 2.3: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。(上) $u_L > u_R$ の場合、特性線の重なりが衝撃波を形成する。(左下) $u_L < u_R$ の場合、特性線は遠ざかって行く、この場合、 u_L と u_R を不連続で接続する解（膨張衝撃波）は、非物理的で、(右下) の希薄波をはさんで物理量が u_L から u_R まで連続的に変化する現象が実現する。

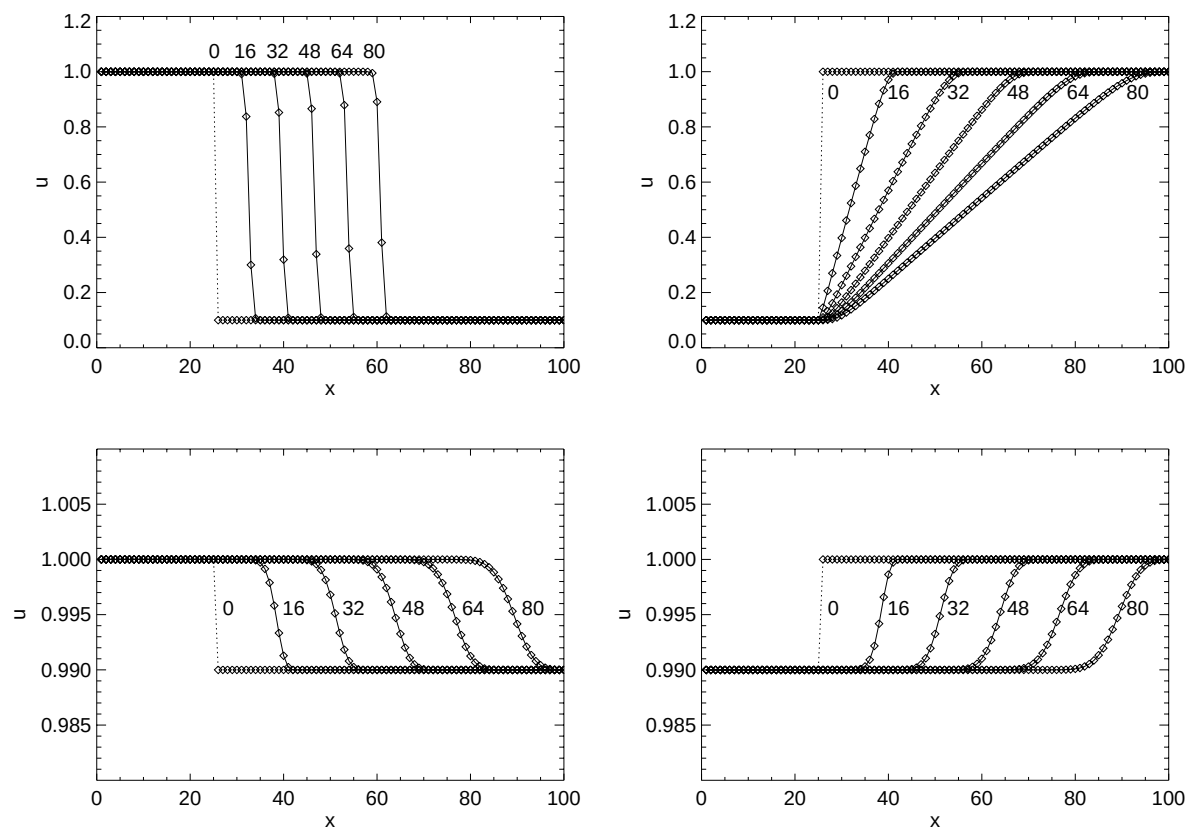


図 2.4: 非粘性バーガーズ方程式のリーマン問題。(左) $u_L = 1$ 、 $u_R = 0.1$ の場合、衝撃波型 ($t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80]$)。 (右) $u_L = 0.1$ 、 $u_R = 1$ の場合、希薄波型 ($t = 0.8 \times [0, 16, 32, 48, 64, 80]$)。下はそれぞれ、振幅が微小で線形な系としてふるまう場合で、(左) $u_L = 1$ 、 $u_R = 0.99$ の場合と (右) $u_L = 0.99$ 、 $u_R = 1$ の場合。

のように近付ければ小さくなるので、

$$[U(x_{S_L}) - U(x_{S_R})]V = \mathbf{F}(U(x_L, t)) - \mathbf{F}(U(x_R, t)), \quad (2.90)$$

これをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。流体力学の基礎方程式はガリレイ変換不変であるので、速度 V で移動する座標系に移っても式の形は変化しない。そこで、普通は衝撃波の伝搬速度と同じ速度で移動する座標系に移って、その座標系での速度 $\hat{v}_x = v_x - V$ を用いると、この系では

$$\mathbf{F}(U(x_L, t)) - \mathbf{F}(U(x_R, t)) = 0, \quad (2.91)$$

であるから、

$$(\rho \hat{v}_x)_L = (\rho \hat{v}_x)_R \quad (2.92)$$

$$(\rho \hat{v}_x^2 + p)_L = (\rho \hat{v}_x^2 + p)_R \quad (2.93)$$

$$[(\hat{e} + p)\hat{v}_x]_L = [(\hat{e} + p)\hat{v}_x]_R \quad (2.94)$$

という衝撃波前面と後面の物理量の間関係をつけるものをランキン・ユゴニオ関係と呼ぶ。

2.4.2 磁気流体力学

結果のみを示すと流れの速度が衝撃波面に垂直な垂直衝撃波を考え、かつ磁場が衝撃波面に平行な向きをしている時、質量流束、運動量流束、エネルギー流束の表式から、

$$(\rho v_x)_L = (\rho v_x)_R \quad (2.95)$$

$$(\rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi})_L = (\rho v_x + p + \frac{B^2}{8\pi})_R \quad (2.96)$$

$$\left[(e + p + \frac{B^2}{4\pi})v_x \right]_L = \left[(e + p + \frac{B^2}{4\pi})v_x \right]_R \quad (2.97)$$

$$(v_x B)_L = (v_x B)_R \quad (2.98)$$

のようになる。

2.5 衝撃波管問題

時間 $t = 0$ での初期状態で圧力、密度などに不連続な分布を持っており時間発展をすると衝撃波を生ずるものを衝撃波管とよぶ。

ここではまず等温ガスに対して、初期に左側 ($x < 0$) に $\rho = \rho_L$ 、右側 ($x > 0$) に $\rho = \rho_R$ ただし、 $\rho_L > \rho_R$ のような分布を考え、そこに生じる流れを調べる。

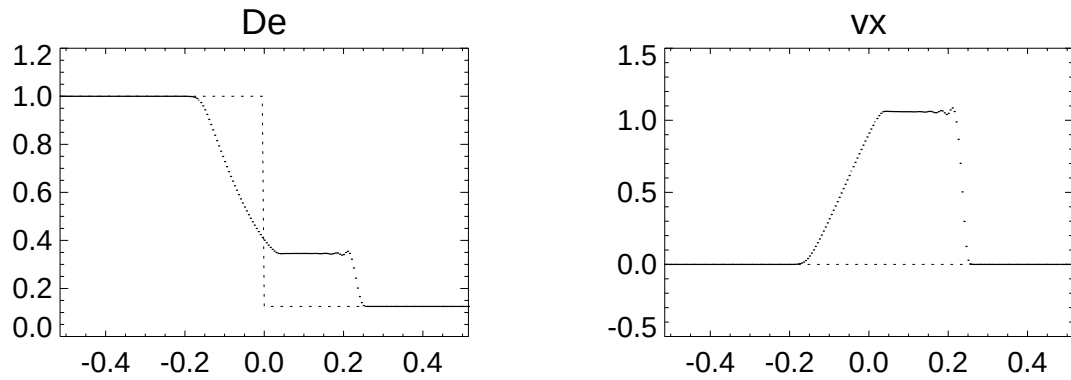


図 2.5: 等温の衝撃波管問題。点線は初期値 $\rho_L = 1$ ($-0.5 < x < 0$)、 $\rho_R = 0.125$ ($0 < x < 0.5$)、 $v_{xL} = v_{xR} = 0$, $c_s = 1$ 、実線は $t = 0.142$ の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く等温衝撃波と、左側に進んで行く希薄波が生じていることがわかる。

2.5.1 等温衝撃波

衝撃波に止まった系で、衝撃波前面の速度を u_1 、衝撃波後面の速度を u_2 、それぞれの密度を、 ρ_1 、 ρ_2 、とおくと、ランキン・ユゴニオ関係から、

$$\rho_1 u_1 = \rho_2 u_2, \quad (2.99)$$

$$\rho_1 (u_1^2 + a^2) = \rho_2 (u_2^2 + a^2), \quad (2.100)$$

ここで、式 (2.99) から

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{u_1}{u_2} = x, \quad (2.101)$$

と置くと、式 (2.100) は

$$x^2 - (M_1^2 + 1)x + M_1^2 = 0, \quad (2.102)$$

となり、これから、

$$x = M_1^2 = \left(\frac{u_1}{a} \right)^2 = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad (2.103)$$

よって、

$$u_1 u_2 = a^2 \quad (2.104)$$

となる。衝撃波の前方は静止していたとき、静止系から見た時の衝撃波後面の速度 U_2 は、衝撃波面の進む速度を $V_s = u_1$ として

$$U_2 = V_s - u_2 = V_s - \frac{a^2}{V_s}, \quad (2.105)$$

であり、衝撃波後面の密度は

$$\rho_2 = \rho_1 \left(\frac{V_s}{a} \right)^2 \quad (2.106)$$

となる。

2.5.2 等温の場合の Riemann 不変量

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.107)$$

を ρ で割ったもの

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.108)$$

と、運動方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.109)$$

を等温音速 a で割ったもの、

$$\frac{\partial \mathcal{M}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathcal{M}}{\partial x} + a \frac{\partial \ln \rho}{\partial x} = 0, \quad (2.110)$$

から、式 (2.108) と式 (2.110) を加えると、

$$\frac{\partial (\ln \rho + \mathcal{M})}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial (\ln \rho + \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \quad (2.111)$$

また、式 (2.108) から式 (2.110) を引くと、

$$\frac{\partial \ln(\rho - \mathcal{M})}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial (\ln \rho - \mathcal{M})}{\partial x} = 0, \quad (2.112)$$

が得られる。すなわち、 $dx/dt = u + a$ の特性線の上では、 $J_+ = \ln \rho + \mathcal{M}$ が一定で、 $dx/dt = u - a$ の特性線の上では、 $J_- = \ln \rho - \mathcal{M}$ が一定となる。この $J_{\pm}$ が等温の場合の Riemann 不変量である。

先に基礎方程式を対角化した時の変形を思いだそう（式 2.80-2.85）。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = 0, \quad (2.113)$$

を

$$\frac{\partial w_1}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial w_1}{\partial x} = 0, \quad (2.114)$$

$$\frac{\partial w_2}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial w_2}{\partial x} = 0, \quad (2.115)$$

$$(2.116)$$

のように書き換えた。この等温のガスダイナミクスでは、 $dx/dt = u - a$ にそって、 w_1 が一定、 $dx/dt = u + a$ にそって、 w_2 が一定に進化する。

流束ヤコビアン $\mathbf{A}$ が一定で、微分演算と交換する時は、

$$\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{W}, \quad (2.117)$$

でこのベクトル $\mathbf{W}$ の成分 $(w^{(1)}, w^{(2)}, \dots)$ が、特性線 $dx/dt = \lambda_1$ 、 $dx/dt = \lambda_2$ 、 $\dots$ 、の上で一定（リーマン不変量と呼ぶ）、つまり

$$d\mathbf{W} = d(\mathbf{L}\mathbf{U}) = 0, \quad (2.118)$$

になるが、一般に、流束ヤコビアン $\mathbf{A}$ が一定ではないが対角化できる時、どのような量が一定に保たれるかを考える。

式 (2.118) に対応するものが、

$$\mathbf{L}d\mathbf{U} = d\mathbf{W}, \quad (2.119)$$

であることは容易に理解できよう。これを成分表示すると、

$$(L)_{il}du_l = dw_i, \quad (2.120)$$

で、これは、 du_j の間に関係があることをしめしている。 i 番めの特性線に沿っては

$$(\ell^{(i)})_l du_l = 0, \quad (2.121)$$

が成り立つ。

これを、等温ガスの場合に適用して、 $J_{\pm}$ が不変量になっていることを示してみよう。式 (2.84) より、 $\lambda_1 = u - a$ に対しては、左固有ベクトル ($\mathbf{L}$ の第 1 行目のベクトル $\ell^{(1)}$) は、

$$\ell^{(1)} = \left(\frac{u+a}{2a} \quad -\frac{1}{2a} \right), \quad (2.122)$$

で、式 (2.120) で、 $u_1 = \rho$ 、 $u_2 = \rho u$ であることに注意すると、

$$dw_1 = \frac{u+a}{2a}d\rho - \frac{1}{2a}d(\rho u) = 0, \quad (2.123)$$

展開すると

$$a d\rho - \rho du = 0, \quad (2.124)$$

これから

$$d(\mathcal{M} - \log \rho) = 0, \quad (2.125)$$

となり、先の J_- が保存量であることが確かめられた。

問題 同じようにして、特性線 $dx/dt = u + a$ に沿って、 J_+ が保存量であることを示せ。

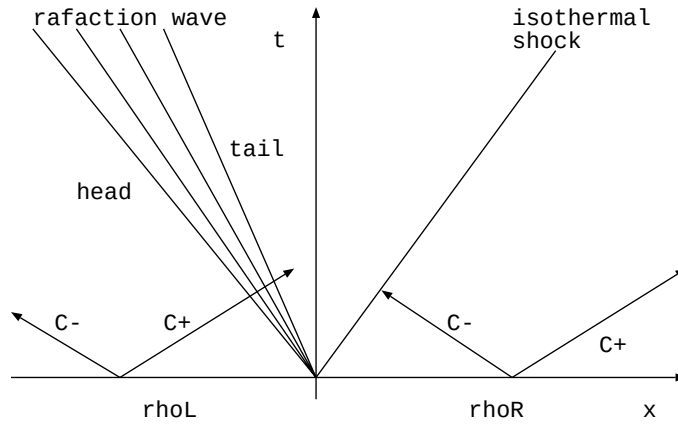


図 2.6: 等温の衝撃波管問題。

2.5.3 等温の場合の衝撃波管の解析解

マイナス方向に希薄波が伝搬する。その上では右向きに伝わる特性線 $dx/dt = u + a$ ($C+$) に沿って、 J_+ が一定である。特性線 C_+ は、もっとも左側の静止している部分につながっていることに注意すると、

$$J_+ = \ln \rho + \mathcal{M} = \ln \rho_L, \quad (2.126)$$

ここで ρ_L はもっとも左側の静止している部分の密度である。これから、

$$\frac{\rho}{\rho_L} = \exp(-\mathcal{M}), \quad (2.127)$$

が成り立つ。希薄波のテール（この場合もっとも右側）の密度と速度が、衝撃波後面のそれ (U_2 , ρ_2) に等しいことを用いると、

$$\frac{\rho_2}{\rho_L} = \exp\left(-\frac{U_2}{a}\right), \quad (2.128)$$

等温衝撃波の条件式 (2.105、2.106) から、もっとも右側の静止している衝撃波前面の密度 ρ_R と、もっとも左側の静止している希薄の先の密度 ρ_L と、衝撃波の速度の関係が以下のように得られる。

$$\frac{\rho_R \left(\frac{V_s}{a}\right)^2}{\rho_L} = \exp\left[-\left(\frac{V_s}{a} - \frac{a}{V_s}\right)\right], \quad (2.129)$$

これは $V_s/a = \xi$ とおくと、

$$\xi^2 \exp\left(\xi - \frac{1}{\xi}\right) = \frac{\rho_L}{\rho_R}, \quad (2.130)$$

となる。この解は数値的に求めると、 $\rho_L/\rho_R = 10$ のときに、 $\xi = 1.75194\dots$ で $\xi - 1/\xi = 1.1811\dots$ のように求められる。

すなわち、初期の密度の不連続の位置を原点にとり、 $a = 1$ とすると、

$$\rho = \begin{cases} \rho_R & x > \xi t \\ \rho_R \xi^2 & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \rho_L \exp(-\mathcal{M}) & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ \rho_L & x < -t \end{cases} \quad (2.131)$$

$$U = \begin{cases} 0 & x > \xi t \\ \xi - \frac{1}{\xi} & (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t < x < \xi t \\ \frac{x+t}{t} & -t < x < (\xi - \frac{1}{\xi} - 1)t \\ 0 & x < -t \end{cases} \quad (2.132)$$

となる。これを数値計算の結果と比較する。

2.5.4 断熱気体の衝撃波管問題

一般の断熱気体については、第3日目にその流束ヤコビアン $\mathbf{M}$ の固有値、固有ベクトルなどを学ぶが、結果だけを述べると、

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \mathbf{M} \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.133)$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \rho \\ v_x \\ p \end{pmatrix}, \mathbf{M} = \begin{pmatrix} v_x & \rho & 0 \\ 0 & v_x & 1/\rho \\ 0 & \gamma p & v_x \end{pmatrix}, \quad (2.134)$$

は、固有値は音速 $c_s = (\gamma p / \rho)^{1/2}$ を使って、

$$\lambda_1 = u - c_s, \quad (2.135)$$

$$\lambda_2 = u, \quad (2.136)$$

$$\lambda_3 = u + c_s, \quad (2.137)$$

$$(2.138)$$

であることがわかる。等温の場合との違いは、 $u \pm c_s$ に加えて、 $\lambda_2 = u$ で伝搬する波が加わったことである。

初期に不連続を持つ分布から進化した衝撃波管問題では、第3の特性線に対応して、衝撃波、希薄波以外に第3の不連続が接触不連続面が発生する（場合がある）。

固有値 λ_i に属する、左固有ベクトル $\ell^{(i)}$ は、

$$\ell^{(1)} = \frac{1}{2\rho c_s^2} (0, -\rho c_s, 1) \quad (2.139)$$

$$\ell^{(2)} = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2, 0, -1) \quad (2.140)$$

$$\ell^{(3)} = \frac{1}{2\rho c_s^2} (0, \rho c_s, 1) \quad (2.141)$$

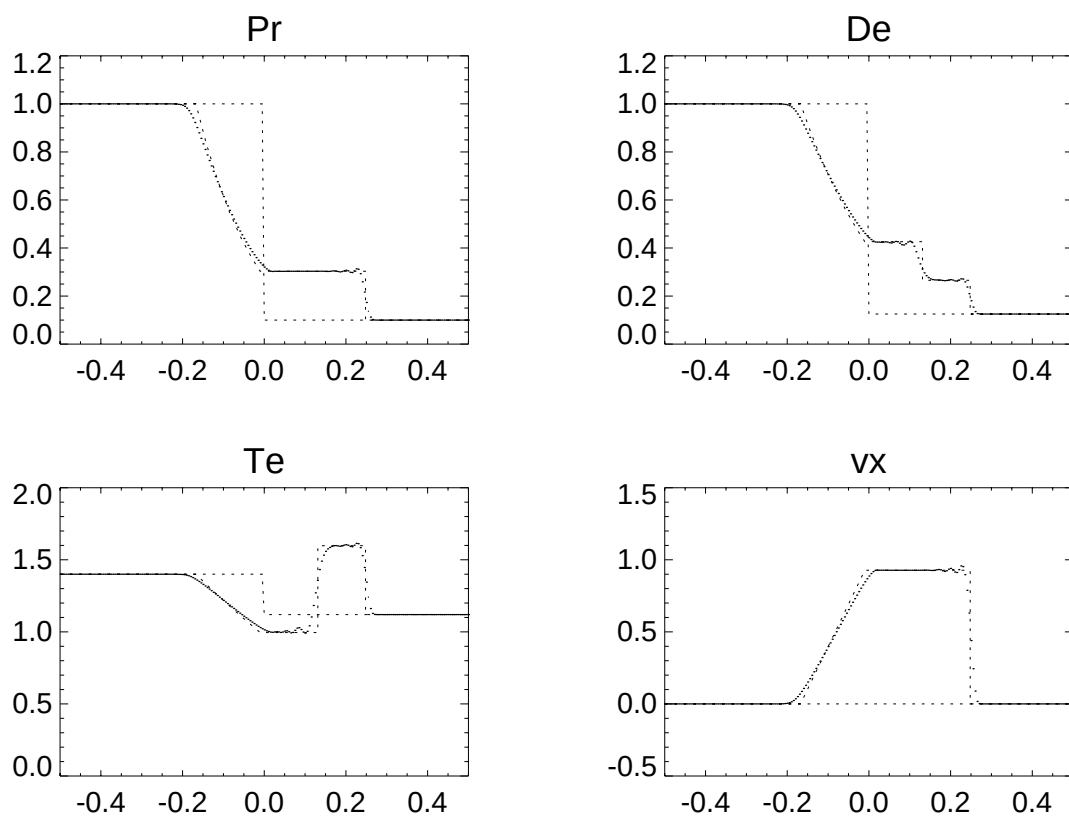


図 2.7: 断熱気体の衝撃波管問題。点線は初期値 $\rho_L = 1(-0.5 < x < 0)$ 、 $\rho_R = 0.125(0 < x < 0.5)$ 、 $p_L = 1(-0.5 < x < 0)$ 、 $p_R = 0.1(0 < x < 0.5)$ 、 $v_{xL} = v_{xR} = 0$ 、 $\gamma = 1.4$ 、実線は $t = 0.142$ の構造。計算法は修正ラックス・ベンドルフ法。右側に進んで行く衝撃波と、左側に進んで行く希薄波、その間に接触不連続面が生じていることがわかる。

になるから、先に導いたように、 LdU を作ると、

$$\frac{dx}{dt} = u - c_s \text{ にそって } \ell^{(1)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (-\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.142)$$

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ にそって } \ell^{(2)} dU = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2 d\rho - dp) = 0 \quad (2.143)$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{ にそって } \ell^{(3)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.144)$$

(λ_2 に属する波である) 接触不連続面越えては、 $dx/dt = u - c_s$ と $dx/dt = u + c_s$ の特性線が左右を結んでいる。したがって接触不連続面越の左右で、

$$-\rho c_s du + dp = 0 \quad (2.145)$$

$$\rho c_s du + dp = 0 \quad (2.146)$$

となっていなければならないことがわかる。これから $dp = 0$ 、 $du = 0$ すなわち接触不連続面では密度 (及び温度) のみが不連続になることがわかる。

断熱気体の流体力学での Riemann 不変量

λ_1 に属する (つまり $dx/dt = u - c_s$ の特性線が関係する) 希薄波では、 $J_+ = u + 2c_s/(\gamma - 1)$ および、エントロピー s が一定、 λ_3 に属する希薄波では、 $J_- = u - 2c_s/(\gamma - 1)$ および、エントロピー s が一定となる。

これは以下のようにして示すことができる。 λ_1 に属する特性線を跨いで、

$$\frac{dx}{dt} = u \text{ にそって } \ell^{(2)} dU = \frac{1}{\rho c_s^2} (c_s^2 d\rho - dp) = 0 \quad (2.147)$$

$$\frac{dx}{dt} = u + c_s \text{ にそって } \ell^{(3)} dU = \frac{1}{2\rho c_s^2} (\rho c_s du + dp) = 0 \quad (2.148)$$

が成り立つが、これから、

$$\rho c_s du + c_s^2 d\rho = 0, \quad (2.149)$$

これから、

$$\int du + \int \frac{c_s}{\rho} d\rho = 0, \quad (2.150)$$

が得られる。 c_s が $\rho^{(\gamma-1)/2}$ に比例することを用いると、第2項も積分できて、

$$u + \frac{2c_s}{\gamma - 1} = J_+, \quad (2.151)$$

が一定値をとる。

λ_3 に属する特性線を跨いでも同様の議論ができて、

$$u - \frac{2c_s}{\gamma - 1} = J_-, \quad (2.152)$$

が一定値をとることが示せる。

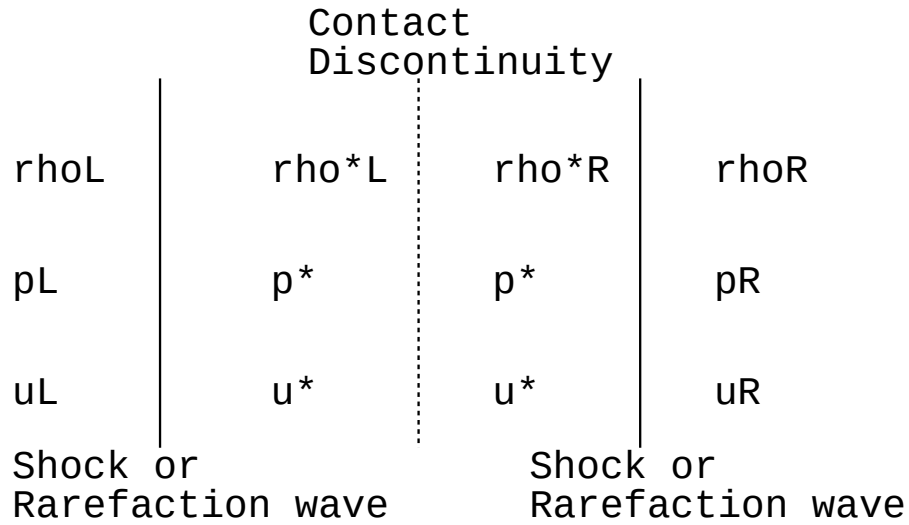


図 2.8: 断熱気体の衝撃波管問題。断熱気体の場合は、真空が現れない普通の問題については、 $dx/dt = u \pm c_s$ の特性線に関連した非線形の波が衝撃波か希薄波として現れ、その中間に、接触不連続面を生じる。初期の密度、圧力、速度が、 $x < 0$ に対しては、 ρ_L 、 p_L 、 u_L 、 $x > 0$ に対しては、 ρ_R 、 p_R 、 u_R であるとき、中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の速度と圧力が u_* と p_* 、接触不連続面の左側の密度が ρ_{*L} 、右側の密度が ρ_{*R} 、衝撃波の速度が V_s であるとして、それらの間の関係を求めることによって、衝撃波管問題の解を求めることができる。

2.5.5 断熱気体の衝撃波管問題解析解*

等温の時に示したように、断熱ガスの衝撃波管問題についても、iteration を用いて解析的に解を求めることができる（リーマン解法プログラムと呼ぶ）。興味ある方々は以下を読んでいただきたい。

初期の密度、圧力、速度が、 $x < 0$ に対しては、 $U_L = (\rho_L, p_L, u_L)$ 、 $x > 0$ に対しては、 $U_R = (\rho_R, p_R, u_R)$ である Riemann 問題を考える（図 2.8 参照）。これらの値の組合せによって、左右には衝撃波もしくは希薄波が伝搬する。左側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は U_L の状態が、右側に伝わる波（衝撃波もしくは希薄波）の先の領域は U_R の状態が、保たれている。その間、 U_L と U_R 両方に依存する中間（希薄波のテールの外、衝撃波の後ろ面）の領域の速度と圧力が u_* と p_* を求めよう。

p_* は、次の方程式の解 p で与えられる。

$$f(p, U_L, U_R) \equiv f_L(p, U_L) + f_R(p, U_R) + \Delta u = 0, \quad (2.153)$$

ここで、

$$\Delta u \equiv u_R - u_L, \quad (2.154)$$

である。ここで、 f_L と f_R は左、右に進む不連続が衝撃波か希薄波かによって次のように与え

られる。

$$f_L(p, \mathbf{U}_L) = \begin{cases} (p - p_L) \left(\frac{A_L}{p + B_L} \right)^{1/2} & \text{if } p > p_L \text{ (shock)} \\ \frac{2a_L}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right] & \text{if } p < p_L \text{ (rarefaction)} \end{cases} \quad (2.155)$$

$$f_R(p, \mathbf{U}_R) = \begin{cases} (p - p_R) \left(\frac{A_R}{p + B_R} \right)^{1/2} & \text{if } p > p_R \text{ (shock)} \\ \frac{2a_R}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p}{p_R} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right] & \text{if } p < p_R \text{ (rarefaction)} \end{cases} \quad (2.156)$$

ここで、

$$\begin{aligned} A_L &= \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_L}, \\ A_R &= \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \\ B_L &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}p_L, \\ B_R &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1}p_R, \end{aligned} \quad (2.157)$$

である。

この解を使って、 u_* は

$$u_* = \frac{u_L + u_R}{2} + \frac{f_R(p_*) - f_L(p_*)}{2} \quad (2.158)$$

で与えられる。

左に進む衝撃波

左に進む衝撃波の場合の f_L を求めてみよう。左に進む衝撃波の速度を $V_L < 0$ とする。 V_L で動く座標での、ガスの速度は、 $\hat{u}_L = u_L - V_L$ 、 $\hat{u}_* = u_* - V_L$ である。ランキン・ユゴニオ条件 (式 2.94) は

$$\rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_*, \quad (2.159)$$

$$\rho_L \hat{u}_L^2 + p_L = \rho_{*L} \hat{u}_*^2 + p_*, \quad (2.160)$$

$$(\hat{e}_L + p_L) \hat{u}_L = (\hat{e}_{*L} + p_*) \hat{u}_*, \quad (2.161)$$

で与えられる。ここで、 ρ_{*L} は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側の密度を、 $\hat{e}_{*L}$ は接触不連続面の左側で左へ進む衝撃波の右側のガスの V_L で動く座標で見た全エネルギーである。

通常行なうように、質量流束 (式 2.160) を

$$Q_L = \rho_L \hat{u}_L = \rho_{*L} \hat{u}_* \quad (2.162)$$

とにおいて、他の式を書き換える。運動量流束の式 (2.161) から、

$$Q_L = -\frac{p_* - p_L}{\hat{u}_* - \hat{u}_L} = -\frac{p_* - p_L}{u_* - u_L}, \quad (2.163)$$

したがって、 u_* を求める式として

$$u_* = u_L - \frac{p_* - p_L}{Q_L}, \quad (2.164)$$

が得られる。

また、 $\hat{u}_L = Q_L/\rho_L$ 、 $\hat{u}_* = Q_L/\rho_{*L}$ を式 (2.163) に代入すると、

$$Q_L^2 = -\frac{p_* - p_L}{\frac{1}{\rho_{*L}} - \frac{1}{\rho_L}} \quad (2.165)$$

となる。ランキン・ユゴニオ関係から密度と圧力の不連続の間の関係

$$\frac{\rho_L}{\rho_{*L}} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} \frac{p_*}{p_L}}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{p_*}{p_L}} \quad (2.166)$$

を、この式 (2.165) に代入すると、

$$Q_L^2 = \frac{\gamma+1}{2} \left(p_* + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_L \right) \rho_L \quad (2.167)$$

がえられる。これを式 (2.164) に代入すると、 u_* と p_* の間の関係を表す式が得られ、

$$u_* = u_L - (p_* - p_L) \left[\frac{\gamma+1}{2} \left(p_* + \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_L \right) \rho_L \right]^{-1/2}, \quad (2.168)$$

となり、この式は

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.169)$$

で

$$f_L(p_*, \mathbf{U}_L) = (p_* - p_L) \left[\frac{A_L}{p_* + B_L} \right]^{1/2} \quad (2.170)$$

および

$$A_L = \frac{2}{(\gamma+1)\rho_L}, \quad B_L = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} p_L \quad (2.171)$$

これは、衝撃波を通り抜けた後の u_* と p_* の間の関係を表す式で、先に上げた式 (2.155) の衝撃波の場合に一致する。

左に進む希薄波

希薄波の内部ではエントロピーの生成は起こらないので（起こるのは衝撃波のみ）、希薄波をはさんで

$$\rho_{*L} = \rho_L \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{1/\gamma} \quad (2.172)$$

が成り立つ。

式 (2.151) のリーマン不変量 J_+ が左に進む希薄波を越えて一定であることを用いると、

$$u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} = u_* + \frac{2c_{s*L}}{\gamma - 1} \quad (2.173)$$

が成り立つ。ここで、音速 c_{s*L} を

$$c_{s*L} = c_{sL} \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)}, \quad (2.174)$$

で書き換えると、

$$u_* = u_L + \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[1 - \left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} \right] \quad (2.175)$$

となる。これは、希薄波を通り抜けたガスがもつ u_* と p_* の間の関係を記述している。最初に上げた式で希薄波の場合、すなわち、

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.176)$$

$$f_L(p_*, \mathbf{U}_L) = \frac{2c_{sL}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_*}{p_L} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right], \quad (2.177)$$

と一致している。

右に進む衝撃波

左に進む場合と同様の計算を行なえば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.178)$$

で

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = (p_* - p_R) \left[\frac{A_R}{p_* + B_R} \right]^{1/2} \quad (2.179)$$

および

$$A_R = \frac{2}{(\gamma + 1)\rho_R}, \quad B_R = \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} p_R \quad (2.180)$$

右に進む希薄波

左に進む場合と同様の計算を行なえば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.181)$$

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = \frac{2c_{sR}}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_*}{p_R} \right)^{(\gamma-1)/(2\gamma)} - 1 \right], \quad (2.182)$$

断熱ガスのリーマン解法

左側の波が与える u_* と右側のそれが等しい条件から、

$$u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R) = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.183)$$

書き換えると、

$$f_R(p_*, \mathbf{U}_R) + f_L(p_*, \mathbf{U}_L) + u_R - u_L = 0, \quad (2.184)$$

で、この式を、満足する p_* の値が実現する中間の領域の圧力である。 p_* が一端求まれば、

$$u_* = u_R + f_R(p_*, \mathbf{U}_R), \quad (2.185)$$

または

$$u_* = u_L - f_L(p_*, \mathbf{U}_L), \quad (2.186)$$

を用いれば、中間の領域の速度が求められる。

最後に、衝撃波、希薄波の伝搬速度を求めておこう。左に進む衝撃波面の速度は

$$\rho_L(u_L - V_L) = \rho_{*L}(u_* - V_L) = Q_L \quad (2.187)$$

から

$$V_L = u_L - \frac{Q_L}{\rho_L}, \quad (2.188)$$

であり、式 (2.163) を用いれば、衝撃波の速度を決めることができる。

次に希薄波についても同じように左に進むものを考えると、希薄波の頭 (Head) と尾 (Tail) はそれぞれ異なるリーマン不変量を持つ $dx/dt = u - c_s$ で進む特性線に一致している。すなわち、希薄波の頭と尾の進行速度、 S_{HL} および S_{TL} は

$$S_{HL} = u_L - a_L, \quad S_{TL} = u_* - a_{*L}, \quad (2.189)$$

となる。また、接触不連続面は

$$S_0 = u_*, \quad (2.190)$$

で伝搬する。

例題

図 2.7 に示した衝撃波管問題を解析的に解いてみよう。

$\rho_L = 1$ 、 $\rho_R = 0.125$ 、 $p_L = 1$ 、 $p_R = 0.1$ 、 $u_L = u_R = 0$ 、 $\gamma = 1.4$ から、式 (2.153) を満足する p を数値的に求めると、 $p_* = 0.30313$ 、 $u_* = 0.92745$ のようになる。

これから、 $\rho_{*L} = 0.42632$ 、 $\rho_{*R} = 0.26557$ 、 $S_{HL} = -1.18322$ 、 $S_{TL} = -0.07027$ 、 $S_0 = u_* = 0.92745$ 、 $V_R = 1.75216$ 、 $t = 0.142$ での位置を求めると、希薄波の頭 $x = -0.16802$ 、希薄波の尾の位置 $x = -0.00998$ 、衝撃波の位置 $x = 0.24881$ のように求めることができる。

練習問題： 図 2.7 に示した衝撃波管問題の解析解を求めるプログラムを作成せよ。

参考文献

この章の参考文献として、以下のものを上げておく。

- (1) 宇宙流体力学 坂下志郎、池内了 培風館
- (2) 流体力学 巽友正 培風館
- (3) 流体力学の数値計算法 藤井孝蔵 東京大学出版会（初期の版には誤植が多いので注意必要）
- (4) Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics 2nd Edition E.F.Toro Springer

(1)、(2) はここで取り扱う圧縮性の流体力学についても詳しく記述してある教科書で、基礎方程式の導出、ランキン・ユゴニオ関係の導出など、ここで記述をはしった部分について参考にして欲しい。(3)、(4) は数値流体力学の教科書。