

CIP 法入門

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2002 年 9 月 11 日-9 月 15 日

場所：名古屋大学情報メディア教育センター

1 CIP 法の基礎概念

双曲型の微分方程式を解く数値計算手法は、差分法だけでもこれまで様々な手法が提案されてきたが [1]、Yabe らによって提案された CIP (Cubic Interpolated Profile [2][3] 法も高次精度差分法の一つであり、これまで流体力学を始め様々な分野で応用され、成果を上げている。本文ではこの CIP 法の導入とその応用、最後に最近提案された保存保証型 CIP 法について触れる事にする。関数 $f(x, t)$ に対する次の微分方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

例えば u が一定値の場合、この方程式の解析解は良く知られている様に次式で表される。

$$f(x, t) = f(x - ut, 0) \quad (2)$$

この解は初期条件のプロファイルが速度 u で平行移動する事を意味している。
(図 1)

この方程式を差分法で解く時は、格子間を補間関数 (多項式) で近似する事から始める。

実際の系では、速度 u は時間的・空間的に一定値ではなく変化する事もあるが、短い時間 Δt 内であれば各格子点 x_i 上の速度 u_i はそれぞれ一定値とみなせる。よって、式 (2) を用いて

$$f(x_i, t + \Delta t) \approx f(x_i - u_i \Delta t, t) \quad (3)$$

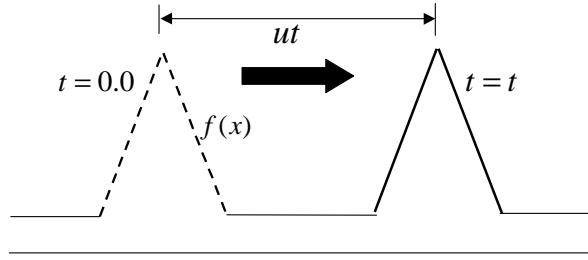


図 1: 関数の平行移動

としてよい。つまり、ある時刻 t における格子点 x_i 上の物理量が分かっているならば Δt 秒後の物理量は式 (3) で求まることになる。

最も簡単な例は 2 点間を 1 次関数で補間する「1 次風上差分法」である。しかしこの手法の場合、プロファイルが移動するに従って解が緩やかになってしまう (図 2: 数値拡散) 他にも 3 点を用いて 2 次関数で補間する「Lax-Wendroff 法」など様々な手法があるが、数値拡散・位相誤差による数値振動等が見られる事がある。

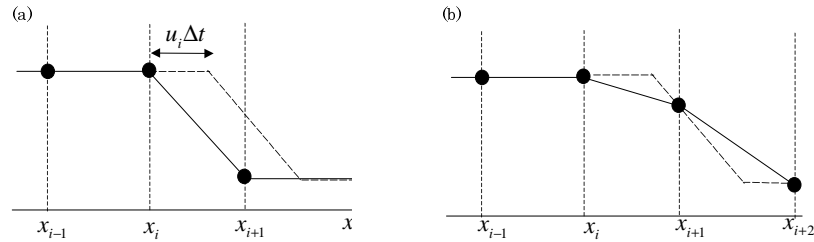


図 2: 1 次風上の例 (a) 初期条件 (実線) を $u\Delta t$ 動かす (点線)。 (b) 正しい解 (点線) と数値計算上の解 (実線)。

CIP 法は、格子 2 点間 $[i, i+1]$ で 3 次補間関数 $F(x)$ を作る。この手法の大きな特徴として、従来の差分法は値のみを用いて格子点間を多項式で補間するが、CIP 法は格子点上の微分値も用いる。

$$F(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d \quad X = x - x_i \quad (4)$$

補間関数の係数は条件「関数の値と微分値が格子点上で連続」という事を要

請すると (速度 $u < 0$ とする)

$$F(0) = f_i^n, F(\Delta x) = f_{i+1}^n, \partial_x F(0) = \partial_x f_i^n, \partial_x F(\Delta x) = \partial_x f_{i+1}^n \quad (5)$$

となる。式 (5) から、3 次関数の係数 a, b, c, d は次の様に求まる。

$$a = \frac{\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n}{\Delta x^2} + \frac{2(f_i^n - f_{i+1}^n)}{\Delta x^3} \quad (6)$$

$$b = \frac{3(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x^2} - \frac{2(\partial_x f_i^n + \partial_x f_{i+1}^n)}{\Delta x} \quad (7)$$

$$c = \partial_x f_i^n \quad (8)$$

$$d = f_i^n \quad (9)$$

ここで n は n ステップ目における値もしくは微分値という事を表している。
速度が正の場合は $i+1 \rightarrow i-1$, $\Delta x \rightarrow -\Delta x$ と変更するだけでよい。

CIP 法では値と共に微分値も時間発展させなくてはならないが、速度 u が一定値の場合は式 (1) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (10)$$

となり、微分値は値と全く同じ方程式を満たす事が分かる。よって、 Δt 秒後 ($n+1$ ステップ目) における値と微分値は次の様に求める事ができる。

$$f_i^{n+1} = F(x_i - u\Delta t) = a\xi^3 + b\xi^2 + \partial_x f^n \xi + f_i^n \quad (11)$$

$$\partial_x f_i^{n+1} = \frac{dF(x_i - u\Delta t)}{dx} = 3a\xi^2 + 2b\xi + \partial_x f^n \quad (12)$$

ここで $\xi = -u\Delta t$ である。初期条件を与えれば式 (11),(12) から時間発展を求める事ができる。

矩形波が速度一定で移流する計算例を載せる。比較の為、1 次風上差分法と Lax-Wendroff 法の計算結果も載せた (図 3)。風上差分法は数値拡散が非常に大きい為、時間発展すると大きく崩れてしまう。また、Lax-Wendroff 法は数値振動が非常に大きい。それに対し、CIP 法は矩形が殆ど崩れる事がなく、解析解に近い形状を保っている事が分かる。

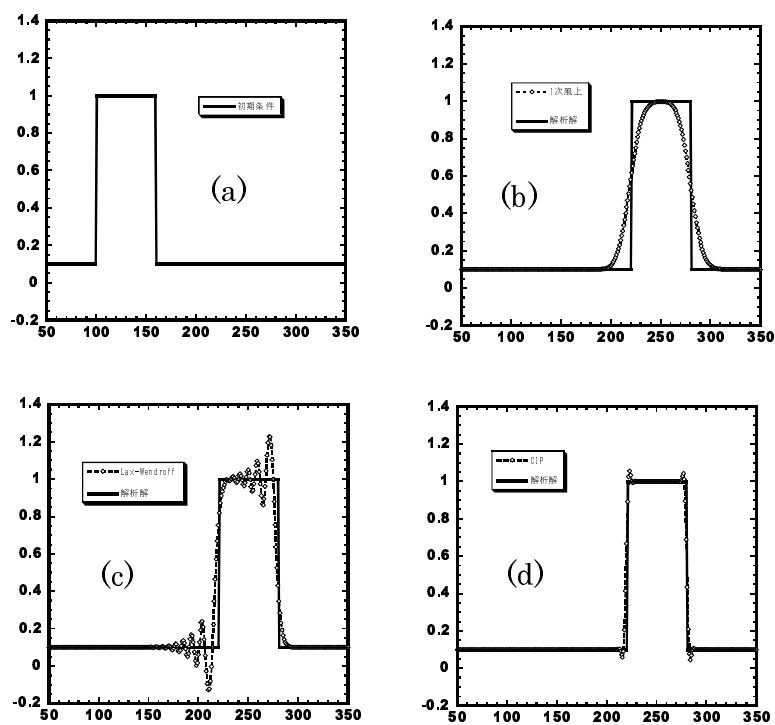


図 3: 矩形波の移流. $u = 1, \Delta x = 1, \Delta t = 0.2$, 600 ステップ計算した結果. (a) 初期条件、(b) 1 次風上差分、(c) Lax-Wendroff、(d) CIP. 実線が解析解、白丸が数値解.

2 非線形方程式への応用

次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = g \quad (13)$$

これは速度が空間・時間依存し、右辺 g も 0 ではない (f, x, t の関数)。この様な場合、CIP 法では「移流相」「非移流相」と分ける事を行なう。式 (13) を変形すると

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = g - f \frac{\partial u}{\partial x} \equiv G \quad (14)$$

となり、また、式 (14) を空間微分すると

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

式 (14),(15) の左辺は先述の移流部分であるが、ここに右辺の項の効果を加える。

移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} + u \frac{\partial(\partial_x f)}{\partial x} = 0 \quad (17)$$

非移流相

$$\frac{\partial f}{\partial t} = G \quad (18)$$

$$\frac{\partial(\partial_x f)}{\partial t} = \partial_x G - \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} \quad (19)$$

計算手順はまず移流相を CIP 法で解いて $(f^n, \partial_x f^n) \rightarrow (f^*, \partial_x f^*)$ と中間の値を求める。(式 (11),(12) で $(f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$ ではなく、 $(f^*, \partial_x f^*)$ とする。)

次にその中間値を用いて、非移流相で単純な時間前進差分・空間中心差分により $(f^*, \partial_x f^*) \rightarrow (f^{n+1}, \partial_x f^{n+1})$ を求め、次ステップの値とする。具体的な計算については次節で述べる。

2.1 非移流相の計算法

移流計算については先述したので、ここでは非移流計算について述べる。
式 (18) は差分化すると

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i \Delta t \quad (20)$$

となる。(今後、上添字 * は移流相計算後の値を意味するものとする。) 次に
式 (19) は差分化すると下式になる。

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{G_{i+1} - G_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (21)$$

ここで G_i の計算であるが、直接 G の式を代入しても計算は出来るが、計算量を
軽減する工夫として式 (20) を用いる事が出来る。つまり $G_i = (f_i^{n+1} - f_i^*)/\Delta t$
なので式 (21) は

$$\partial_x f_i^{n+1} = \partial_x f_i^* + \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_{i+1}^*) - (f_{i-1}^{n+1} - f_{i-1}^*)}{2\Delta x \Delta t} \Delta t - \partial_x f_i^* \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2\Delta x} \Delta t \quad (22)$$

と既に求まっている量で計算する事が出来る。

2.2 計算手順のまとめ

式 (14) の解き方を簡単に手順をまとめておくと

1. CIP 法 (式 (11),(12)) を用いて、移流相 (式 (16),(17)) の計算を行い
($f^n, \partial_x f^n$) \rightarrow ($f^*, \partial_x f^*$) とする。
2. 式 (20),(22) を用いて非移流相の計算を行ない、($f^*, \partial_x f^*$) \rightarrow ($f^{n+1}, \partial_x f^{n+1}$)
とし、時間発展させる。
3. 以下、繰り返し

この用にすれば、後述の流体方程式やその他の様々な双曲型方程式 (Vlasov-
Boltzmann 方程式、等) に対して CIP 法が適用出来る事が分かる。

3 流体力学への応用

3.1 基礎方程式

1次元直交座標系での非粘性圧縮性流体の基礎方程式は次式で表される。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} = -\rho \frac{\partial u}{\partial x} \quad (23)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (24)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = -\gamma p \frac{\partial u}{\partial x} \quad (25)$$

となる。ここで ρ は密度、 u は速度、 p は圧力、 e は単位質量当たりの内部エネルギーである。理想気体では

$$e = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (26)$$

である。 γ は比熱比である。式 (23) ~ (25) はそれぞれ式 (14) と全く同形である。よってそれぞれを移流相・非移流相に分けて CIP 法を用いて計算する事が出来る。

ここで物理量の定義点についてであるが、大きく2つに分ける事が出来る。1つは (ρ, u, p) 全て同じ点に定義するレギュラー格子、もう1つはスカラー量 (ρ, p) の定義点の中間点にベクトル量 u (多次元を考慮してこう呼ぶ事にする。) を定義するスタガード格子であるが、本手法では後者を用いる。

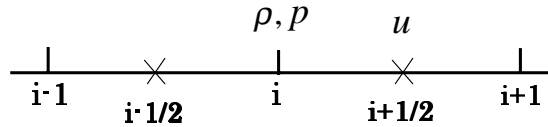


図 4: スタガード格子での、1次元での物理量配置。

3.2 人工粘性

圧縮性流体の計算では、超音速になると衝撃波が発生する。衝撃波は数学的には不連続面であるが、実際は流体に粘性がある為、衝撃波は分子の平均自由行程程度の厚さを持っている。数値解析では、衝撃波の厚さを格子幅 Δx 程

度で捉える事が出来れば良いので、衝撃波面のみに作用する人工的な粘性を圧力項に加える事で衝撃波を捉える事が可能になる。ここでは Von-Neumann 型の人工粘性 [4][5] を用いる。

$$q_i = \begin{cases} \alpha[-\rho_i C_s (\frac{\partial u}{\partial x})\lambda + \frac{\gamma+1}{2} (\frac{\partial u}{\partial x})^2 \lambda^2] & \text{if } \frac{\partial u}{\partial x} < 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

である。 q_i は圧力と同じ定義点なので、 $(\partial u / \partial x) = (u_{i+1/2} - u_{i-1/2}) / \Delta x$ であり、圧縮領域のみに人工粘性が加わる事になる。 λ は衝撃波の厚さであるが、ここでは格子幅 Δx とすればよい。また、 $C_s = \sqrt{\gamma p_i^n / \rho_i^n}$ は音速、 α は人工粘性係数で 0.6 から 1.0 の間程度の値である。

よって、人工粘性を入れた差分式は

$$\frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^*}{\Delta t} = -\rho_i^* \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (27)$$

$$\frac{u_{i+1/2}^{n+1} - u_{i+1/2}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho_{i+1/2}^*} \frac{(p_{i+1}^* + q_{i+1}^*) - (p_i^* + q_i^*)}{\Delta x} \quad (28)$$

$$\frac{p_i^{n+1} - p_i^*}{\Delta t} = -\{\gamma p_i^* + (\gamma - 1)q_i^*\} \frac{u_{i+1/2}^* - u_{i-1/2}^*}{\Delta x} \quad (29)$$

となる。ここで $\rho_{i+1/2}^* = (\rho_{i+1}^* + \rho_i^*)/2$ である。式 (29) 中で $(\gamma - 1)q_i^*$ となっているのは、元々は保存形の基礎方程式の圧力に人工粘性を加える事から導かれる為である。

3.3 応用：CCUP 法

前節で移流相に CIP、非移流相に式 (27) ~ (29) を用いて流体方程式が解ける事が分かった。ところで、この非移流相を次の様に書き換えてみる。

$$\frac{\rho^{n+1} - \rho^*}{\Delta t} = -\rho^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (30)$$

$$\frac{\vec{u}^{**} - \vec{u}^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \quad (31)$$

$$\frac{p_i^{**} - p_i^*}{\Delta t} = -\gamma p^* \nabla \cdot \vec{u}^{**} \quad (32)$$

ここで格子点の下添字は省略し、一般的なベクトルの形で書く事にする。式 (27) ~ (29) では右辺の時刻は全て * であったが、本手法では右辺にも ** がある陰解法になっている。式 (31) の両辺の div を取り、 $\gamma p = \rho C_s^2$ (C_s は音速)

である事に注意して式 (32) を代入すると、次の圧力に関する poisson 方程式が導かれる。

$$\nabla \cdot \left(\frac{\nabla p^{**}}{\rho^*} \right) = \frac{p^{**} - p^*}{\rho^* C_s^2 \Delta t^2} + \frac{\nabla \cdot \vec{u}^*}{\Delta t} \quad (33)$$

本手法を CIP-CUP 法 (CIP-Combined Unified Procedure) と呼ぶ [6]。式 (33) を反復法 (SOR, Bi-CGSTAB, etc) で p^{**} を求めてから式 (31) で \vec{u}^{**} を求め、式 (30) で ρ^{n+1} を求める。非圧縮性流体は音速 の近似であるが、式 (33) で $C_s \rightarrow \infty$ とすると MAC 法の様な式になる。この様に音速を変える事によって圧縮性・非圧縮性流体を統一的に解く事が出来る。実際には人工粘性・実粘性・熱伝導等の効果を入れる事になるので、

$$\frac{\vec{u}^{n+1} - \vec{u}^{**}}{\Delta t} = \vec{Q}_u \quad (34)$$

$$\frac{p^{n+1} - p^{**}}{\Delta t} = Q_p \quad (35)$$

(\vec{Q}_u, Q_p は先述の効果) の様に後でそれらの効果で時間発展させ、 p^{n+1} 、 \vec{u}^{n+1} を求める。

3.4 計算例

計算例として最も典型的な衝撃波管問題を CIP 法と CCUP 法で解いた結果を示す。初期条件は $p = 1, \rho = 1$ ($x < 1$), $p = 0.1, \rho = 0.125$ ($x > 1$)。比熱比 $\gamma = 1.4$ 、格子幅 $\Delta x = 0.1$ 時間刻み $\Delta t = 0.01$ とし、400 ステップまで計算を行なった。また、人工粘性係数 $\alpha = 0.7$ である。図 5 は密度の結果であるが、共に解析解とほぼ一致した解が得られている事が分かる。また、衝撃波面も sharp に捉えられている事が分かる。

接触不連続面で若干の overshoot, undershoot が見られるが、これらも単調性が保証されている有理関数 CIP 法 [7] を用いる事で改善する事が出来る。圧縮性流体の計算では CIP 法の方が Rarefaction Wave 等を見ても若干良い様であるが、CCUP 法は計算が安定であるという利点がある。

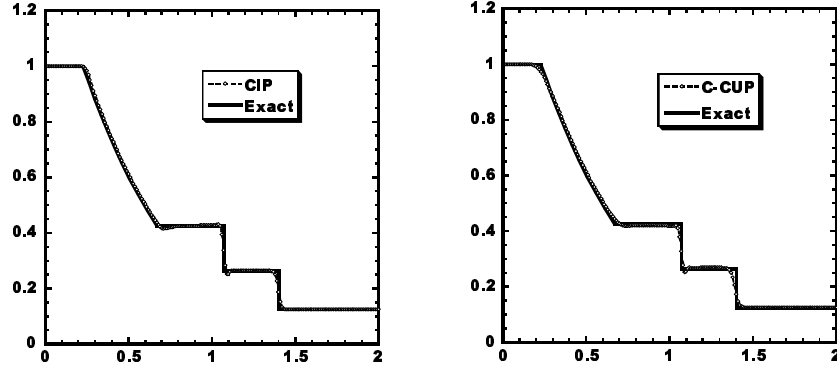


図 5: CIP 法 (左) と CCUP 法 (右) の計算結果 (密度)

3.5 (Appendix) 円柱・球座標系の半径方向 1 次元 CIP

ここまで述べてきたのはデカルト 1 次元座標系だが、容易に他の座標系にも拡張出来る。例えば流体方程式は次の様に一般的に書き換えられる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^\delta} \frac{\partial(\rho u r^\delta)}{\partial r} = 0 \quad (36)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} \quad (37)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial r} = -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(ur^\delta)}{\partial r} \quad (38)$$

ここで、 $\delta = 0, 1, 2$ はそれぞれデカルト、円柱、球座標に対応する。よって、右辺の非移流項は

$$\mathbf{G} = \left(-\frac{\rho}{r^\delta} \frac{\partial(ur^\delta)}{\partial r}, -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r}, -\frac{p}{\rho r^\delta} \frac{\partial(ur^\delta)}{\partial r} \right) \quad (39)$$

と変えるだけで良い。

4 保存保証型 CIP 法

4.1 CIP-CSL2(Conservative Semi-Lagrangian) 法

第 1,2 章で述べた CIP 法は「非保存形」の方程式に適用するので、値の保存が数学的には保証されていない。(しかし、通常非保存形の差分法と比較しても保存の崩れは非常に小さい。)そこで近年、保存が保証される CIP

法が提案されている。これまで CIP-CSL4[8] 法と CIP-CSL2 [9] 法が提案されているが、本節では CIP-CSL2 法について述べる。

例えば次の様な方程式を考える。

$$\frac{\partial D}{\partial t} + u \frac{\partial D}{\partial x} = 0 \quad (40)$$

これは普通の移流方程式だが、式 (40) の空間微分を取り、 $D' \equiv \partial D / \partial x$ とすると次の保存方程式が得られる。

$$\frac{\partial D'}{\partial t} + \frac{\partial (uD')}{\partial x} = 0 \quad (41)$$

この事から、式 (41) で $D' \equiv f(= \text{値})$, 式 (40) で $D = \int f dx$ とすれば CIP 法における値と微分値の関係をそのまま積分値と値に置き換える事が出来、第 1,2 章で述べた関係式をそのまま適用する事が出来る。

通常の CIP 法は値 f と微分値 $\partial f / \partial x$ を用いて 3 次補間関数を構築するが、CIP-CSL2 法は値 f と積分値 $\rho = \int f dx$ を用いて 2 次関数を構築する。その際、積分値 ρ は格子の中心に定義する。値が 2 次関数なので、積分値の関数は 3 次関数になっている。そこで

$$D_i(x) = \int_{x_i}^x f(x') dx' \quad (42)$$

を導入し、

$$D_i(x) = A1_i X^3 + A2_i X^2 + f_i^n X \quad (43)$$

と積分値を 3 次関数で補間すれば、その微分に対応する値の関数は

$$F_i(x) = \frac{\partial D(x)}{\partial x} = 3A1_i X^2 + 2A2_i X + f_i^n \quad (44)$$

と書く事が出来る。ここで $X \equiv x - x_i$ である。

補間関数 $D_i(x)$ の連続条件は、 $D_i(x)$ が値を与える事に注意すると CIP 法と同様に

$$\begin{aligned} D_i(x_i) &= 0, \quad D_i(x_{iup}) = -\text{sgn}(u_i) \rho_{icell}^n, \\ \partial_x D_i(x_i) &= f_i^n, \quad \partial_x D_i(x_{iup}) = f_{iup}^n \end{aligned} \quad (45)$$

ここで、 ρ_{icell}^n は上流側の格子内の全質量 ($icell = i - \text{sgn}(u_i)/2$)、 $iup = i - \text{sgn}(u_i)$ である。よって、係数 A1,A2 は

$$A1 = \frac{f_i^n + f_{iup}^n}{\Delta x_i^2} + \frac{2\text{sgn}(u_i)\rho_{icell}^n}{\Delta x_i^3} \quad (46)$$

$$A2 = -\frac{3\text{sgn}(u_i)\rho_{icell}^n}{\Delta x_i^2} - \frac{2(f_i^n + f_{iup}^n)}{\Delta x_i} \quad (47)$$

$\Delta x_i \equiv x_{iup} - x_i$ であり、この様に一意に決定する事が出来る。

4.2 時間発展のまとめ

CIP 法が値 f と微分値 $\partial_x f$ の時間発展が必要なのに対応して、CIP-CSL2 法は値 f と積分値 ρ の時間発展が必要である。よって、保存方程式

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (48)$$

を CIP-CSL2 法で解く時は

1. 値 f は、式 (48) を移流相と非移流相に分け、式 (16),(18) ($g = 0$) の様に時間発展させる。つまり

(a) 移流相

$$f_i^* = F(x_i - u\Delta t) = 3A1\xi^2 + 2A2\xi + f_i^n \quad (49)$$

(b) 非移流相

$$f_i^{n+1} = f_i^* + G_i\Delta t \quad G_i = -f_i^* \frac{\partial u}{\partial x} \quad (50)$$

である。

2. 積分値 ρ は、格子内の質量の流入出を考慮すればよいので (図 6 参照)

$$\rho_{i-1/2}^{n+1} = \rho_{i-1/2}^n + (\Delta\rho_{i-1}^n - \Delta\rho_i^n) \quad (51)$$

とすればよく、また $\Delta\rho_i^n$ は格子点上での質量流束を表し、

$$\begin{aligned} \Delta\rho_i^n &= \int_{x_i+\xi}^{x_i} F(x')dx' = -D_i(x_i + \xi) \\ &= -(A1_i\xi^3 + A2_i\xi^2 + f_i^n\xi) \end{aligned} \quad (52)$$

と書く事が出来る。

3. 以下、繰り返し

ここで $\xi = -u_i \Delta t$ である。式 (51),(52) は、各格子間での質量（積分値）の収支を表しているので、計算領域全体で全質量が保存される事がわかる。

本手法は、例えば流体方程式の連続の式は CIP-CSL2 法で解いて質量保存させ、運動方程式・エネルギー式は通常の CIP 法で解くといった応用が出来る。

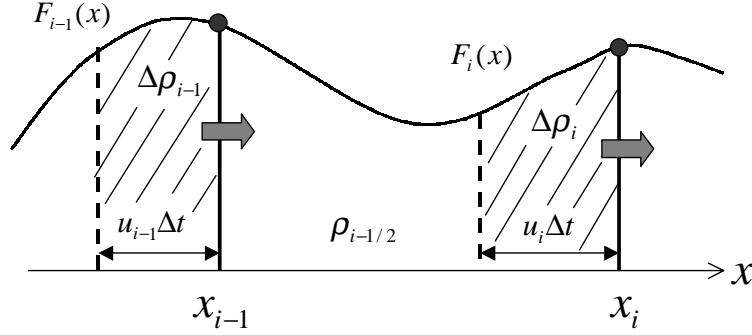


図 6: Δt 内の格子内の質量流入・流出。

4.3 計算例

式 (48) の計算例として、次の計算を行なった。速度は

$$u(x) = 1.0 / (1.0 + 0.5 \sin(2\pi x)) \quad (53)$$

とし、値の初期条件は

$$f(x, t = 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } 0.25 \leq x \leq 0.45 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とした。格子幅 $\Delta x = 2.0/N$ (N は格子数)、時間幅 $\Delta t = \Delta x \times 0.2$ とし、格子数を変えてそれぞれ $t = 0.8$ まで計算を行なった。また、積分値 ρ の初期条件は格子間が直線補間されているとして

$$\rho_{i-1/2}^0 = \frac{f_{i-1}^0 + f_i^0}{2} (x_i - x_{i-1}) \quad (54)$$

とした。

図 7(a)(b) は計算結果と解析解との比較、図 7(c)(d) は Mass Error (最も粗い $N = 200$) を表している。計算結果については、同じ格子数で従来の CIP 法とほぼ同等の結果を得る事が出来ている。保存については、値 f については完全には保存はしていない。これは初期条件で積分値を直線補間したと仮定

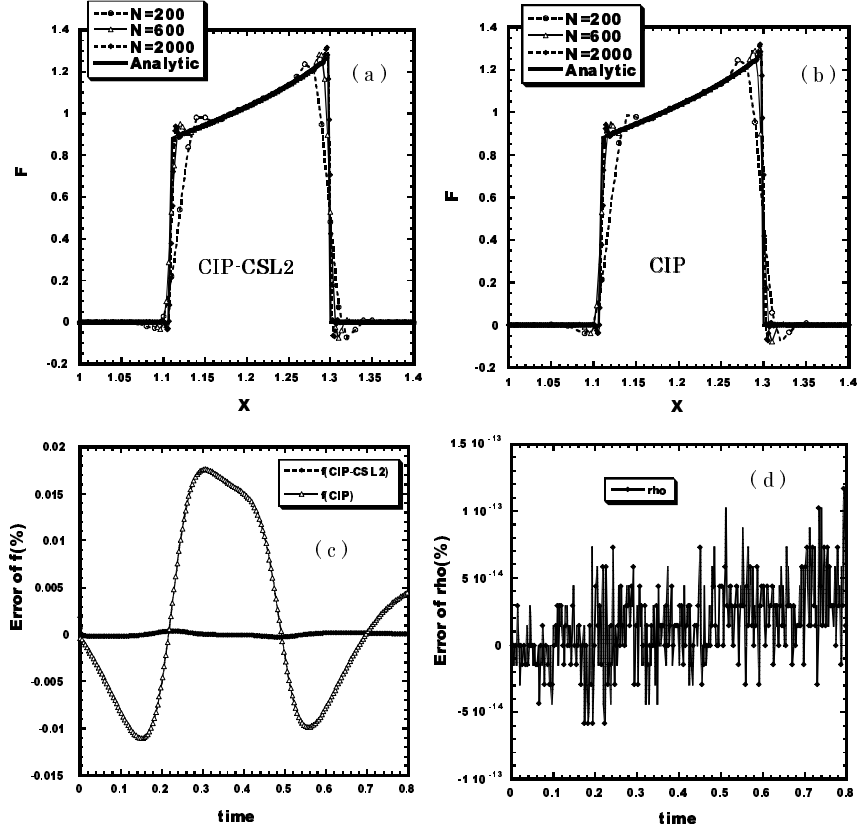


図 7: 計算結果。(a) 格子数 $N = 200, 600, 2000$ の結果と解析解 (CIP-CSL2)、
 (b) 同 CIP、(c) 値 f の Mass Error(CIP、CIP-CSL2)、(d) 積分値 ρ の Mass
 Error(CIP-CSL2)。

した為である。CIP 法も十分小さい範囲で f も保存されているが、CIP-CSL2 法は更にその保存が良くなっている。また、CIP-CSL2 法で用いられている積分値 ρ については計算機の誤差 ($\sim 10^{-14}$) 以内で質量が保存されている。格子内質量の正しい定義が $f_i \Delta x$ ではなく $\rho_{i-1/2}$ であることを考慮すれば、本手法は完全な保存保証スキームである事が分かる。

4.4 多次元化

4.4.1 2次元

多次元化する方法として、Directional Splitting[10] の方法を簡単に紹介する。例えば 2 次元の場合、方程式は

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (55)$$

となるが、1 次元の手法を活用する為に図 8 の様な物理量を定義する。

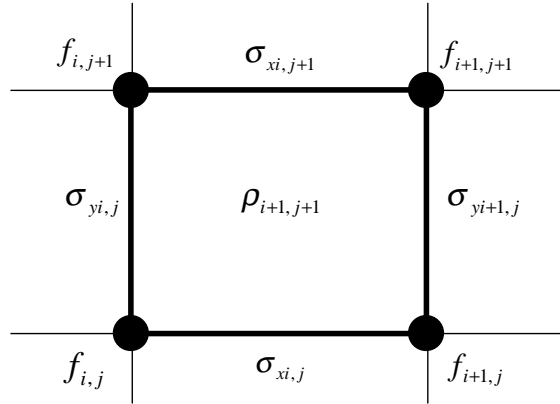


図 8: CIP-CSL2 の物理量 (2 次元)。線密度 σ_x, σ_y と密度 ρ 。

ここで、

$$\sigma_{xij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y_j, t) dx \quad (56)$$

$$\sigma_{yij}^n = \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, t) dy \quad (57)$$

$$\rho_{ij}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, t) dy dx \quad (58)$$

である。計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (59)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (60)$$

を順次行なう。前節、式 (48) ~ (52) の手順を $CIPCSL1D(u, f^n, f^{n+1}, \rho^n, \rho^{n+1}, x)$ と置くと、

$$\begin{aligned} STEP1 : CIPCSL1D(u, f^n, f^{step1}, \sigma_x^n, \sigma_x^{step1}, x) \\ \bar{u} = \frac{u_{ij} + u_{i+1j}}{2} \\ CIPCSL1D(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{step1}, \rho^n, \rho^{step1}, x) \end{aligned} \quad (61)$$

$$\begin{aligned} STEP2 : CIPCSL1D(v, f^{step1}, f^{n+1}, \sigma_y^{step1}, \sigma_y^{n+1}, y) \\ \bar{v} = \frac{v_{ij} + v_{i+1j}}{2} \\ CIPCSL1D(\bar{v}, \sigma_x^{step1}, \sigma_x^{n+1}, \rho^{step1}, \rho^{n+1}, y) \end{aligned} \quad (62)$$

とすればよい。

4.4.2 3次元

3次元では、線密度 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と面密度 S_{xy}, S_{yz}, S_{zx} (と密度 ρ) を用意する (図9参照)。ここで

$$S_{xyijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x, y, z_k, t) dy dx \quad (63)$$

$$S_{yzijk}^n = \int_{z_k}^{z_{k+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} f(x_i, y, z, t) dy dz \quad (64)$$

$$S_{zxijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y_j, z, t) dx dz \quad (65)$$

$$\rho_{ijk}^n = \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{y_{j+1}} \int_{z_k}^{z_{k+1}} f(x, y, z, t) dx dy dz \quad (66)$$

である。同様に計算手順は

$$STEP1 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(uf)}{\partial x} = 0 \quad (67)$$

$$STEP2 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(vf)}{\partial y} = 0 \quad (68)$$

$$STEP3 : \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial(wf)}{\partial z} = 0 \quad (69)$$

であり、2次元と同様に

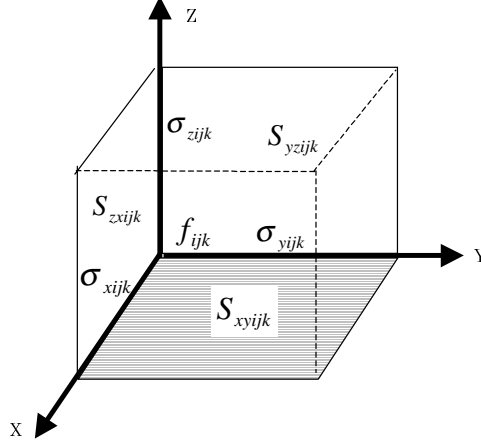


図 9: CIP-CSL2 の物理量 (3 次元)。線密度 $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ と面密度 S_{xy}, S_{yz}, S_{zx}

$$\begin{aligned}
\text{STEP1} & : \text{CIPCSL1D}(u, f^n, f^{\text{step1}}, \sigma_x^n, \sigma_x^{\text{step1}}, x) \\
& \quad \bar{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ij+1k}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{u}, \sigma_y^n, \sigma_y^{\text{step1}}, S_{xy}^n, S_{xy}^{\text{step1}}, x) \\
& \quad \hat{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\hat{u}, \sigma_z^n, \sigma_z^{\text{step1}}, S_{zx}^n, S_{zx}^{\text{step1}}, x) \\
& \quad \tilde{u} = \frac{u_{ijk} + u_{ijk+1} + u_{ij+1k} + u_{ij+1k+1}}{4} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\tilde{u}, S_{yz}^n, S_{yz}^{\text{step1}}, \rho^n, \rho^{\text{step1}}, x) \quad (70) \\
\text{STEP2} & : \text{CIPCSL1D}(v, f^{\text{step1}}, f^{\text{step2}}, \sigma_y^{\text{step1}}, \sigma_y^{\text{step2}}, y) \\
& \quad \bar{v} = \frac{v_{ijk} + v_{i+1jk}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{v}, \sigma_x^{\text{step1}}, \sigma_x^{\text{step2}}, S_{xy}^{\text{step1}}, S_{xy}^{\text{step2}}, y) \\
& \quad \hat{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\hat{v}, \sigma_z^{\text{step1}}, \sigma_z^{\text{step2}}, S_{yz}^{\text{step1}}, S_{yz}^{\text{step2}}, y) \\
& \quad \tilde{v} = \frac{v_{ijk} + v_{ijk+1} + v_{i+1jk} + v_{i+1jk+1}}{4} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\tilde{v}, S_{zx}^{\text{step1}}, S_{zx}^{\text{step2}}, \rho^{\text{step1}}, \rho^{\text{step2}}, y) \quad (71) \\
\text{STEP3} & : \text{CIPCSL1D}(w, f^{\text{step2}}, f^{n+1}, \sigma_z^{\text{step2}}, \sigma_z^{n+1}, z) \\
& \quad \bar{w} = \frac{w_{ijk} + w_{i+1jk}}{2} \\
& \quad \text{CIPCSL1D}(\bar{w}, \sigma_x^{\text{step2}}, \sigma_x^{n+1}, S_{zx}^{\text{step2}}, S_{zx}^{n+1}, z) \\
& \quad \hat{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k}}{2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& CIPCSL1D(\hat{w}, \sigma_y^{step2}, \sigma_y^{n+1}, S_{yz}^{step2}, S_{yz}^{n+1}, z) \\
& \tilde{w} = \frac{w_{ijk} + w_{ij+1k} + w_{i+1jk} + w_{i+1j+1k}}{4} \\
& CIPCSL1D(\tilde{w}, S_{xy}^{step2}, S_{xy}^{n+1}, \rho^{step2}, \rho^{n+1}, z)
\end{aligned} \tag{72}$$

である。

参考文献

- [1] E.F.Toro, Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics (Springer, 1997)
- [2] T.Yabe, F.Xiao and T.Utsumi, The Constrained Interpolation Profile Method for Multiphase Analysis, *J.Comput.Phys.*,**169**,556 (2001).
- [3] T.Yabe and T.Aoki, A Universal Solver for Hyperbolic Equations by Cubic-Polynomial Interpolation. I. One-Dimensional Solver, *Comput.Phys.Commun.*,**66**,219 (1991).
- [4] J.Von Neumann, R.D.Richtmyer, *J.Appl.Phys.*,**21**,232 (1950).
- [5] Y.Ogata and T.Yabe, Shock capturing with improved numerical viscosity in primitive Euler representation, *Comput.Phys.Commun*,**119**,179 (1999)
- [6] T.Yabe and P.Y.Wang, Unified Numerical Procedure for Compressible and Incompressible Fluid, *J.Phys.Soc.Japan.*,**60**,No.7,2105 (1991).
- [7] F.Xiao,T.Yabe and T.Ito, *Comput.Phys.Commun.*,**93**,1 (1996).
- [8] R.Tanaka,T.Nakamura and T.Yabe, *Comput.Phys.Commun.*,**126**,232 (2000)
- [9] T.Yabe,R.Tanaka,T.Nakamura and F.Xiao, *Mon. Wea. Rev.*,**129**,332 (2001)
- [10] T.Nakamura,R.Tanaka,T.Yabe,and K.Takizawa, *J. Comput.Phys.*,**174**,171 (2001)

CIP 法による MHD 解法

「天体とスペースプラズマのシミュレーションサマースクール」

2002 年 9 月 11 日-9 月 15 日

場所：名古屋大学情報メディア教育センター

1 CIP 法による MHD 解法：CIP-MOCCT 法

現在様々な MHD 解法が存在するが、CIP 法で MHD を解く場合に磁場項と誘導方程式をどの様に解くかが課題となる。その解決法として、誘導方程式の解法である MOCCT 法を組み合わせた CIP-MOCCT 法が Kudoh (国立天文台) によって提案された [1][2][3]。これを紹介する。

磁気流体の基礎方程式は次の様に書かれる。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p + \frac{B^2}{8\pi}) + \frac{1}{4\pi\rho} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} + \mathbf{Q}_f \quad (2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) p = -\gamma p \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{Q}_p \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (5)$$

ここで \mathbf{Q}_f は実粘性・人工粘性・重力等の外力項、 \mathbf{Q}_p は熱伝導・人工粘性等の項である。

式 (1) ~ (3) 中の左辺は CIP 法で解き、右辺は非移流相として解けば良いのだが (圧力項を Poisson 方程式で解けば CCUP 法になる) 式 (4),(5) の解法に MOCCT 法を用いる。

2 MOCCT 法の概略

MOCCT 法は $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を満たす様に式 (4) を解く CT 法と、アルフベン波特性曲線を安定に解く為の MOC 法を組み合わせた手法である。

2.1 MOC : Alfven 波特性曲線法

磁気流体方程式中の Maxwell 方程式は

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} \quad (6)$$

$$\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} \quad (7)$$

であるが、ここでは $\eta = 0$ とする。まずは簡単の為、1 次元 (X 方向) の場合を採りあげる。格子点 x_i 上に ρ, p, B_y, v_y を配置し、格子点間に v_x と起電力 (電場) E の z 成分 ε_z を配置する。(図 1)

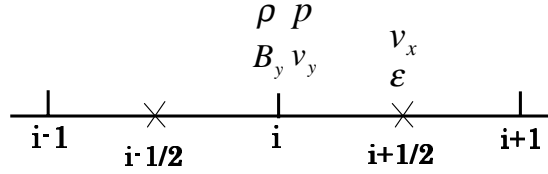


図 1: 1 次元の物理量配置。速度 X 成分と電場は格子の中心に定義。

式 (6),(7) より B_y の方程式は次の様に差分化する事が出来る。

$$\frac{B_{yi}^{n+1} - B_{yi}^n}{\Delta t} + \frac{(\varepsilon_z)_{i+1/2}^* - (\varepsilon_z)_{i-1/2}^*}{\Delta x} = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon_{zi+1/2}^* = u_{i+1/2} B_y^* - v^* B_x$$

ここで * は中間の時刻 $(n + 1/2)$ を表す。また、 $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ より、 $B_x = \text{const}$ である。この ε_z^* を求める時にアルフベン波の特性曲線法 (Method of Characteristics : MOC) を用いる [4]。アルフベン波は非圧縮性 MHD に見られる波動であるので、特性曲線は次の 2 つの式、運動方程式と誘導方程式から導かれる。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} = \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x v_y)}{\partial x} \quad (9)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = B_x \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial (v_x B_y)}{\partial x} \quad (10)$$

($\rho, v_x, B_x = \text{constant}$) 式 (9),(10) を変形すると、別の 2 式が得られる。

$$\frac{Dv_y}{Dt} \mp \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho}} \frac{DB_y}{Dt} = 0 \quad (11)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) \frac{\partial}{\partial x} \quad (12)$$

式 (12) は特性速度 (移流速度) が $C^\pm = v_x \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}}$ を意味し、特性線 : 式 (11) に沿って $v_y \mp \frac{B_y}{\sqrt{4\pi\rho}}$ が保存される不変量になっている事を表している。

よって、式 (11) を特性線に沿って積分すると、特性曲線の始点 (時刻 n) と * の間には次の様な関係式が導かれる事になる。(図 2)

$$v_y^* - v_y^+ - \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^+}}(B_y^* - B_y^+) = 0 \quad (13)$$

$$v_y^* - v_y^- + \frac{1}{\sqrt{4\pi\rho^-}}(B_y^* - B_y^-) = 0 \quad (14)$$

ここで、 $(B_y, v_y)^\pm$ は各特性線 C^\pm の始点の値である。式 (13),(14) から、 v_y^* と B_y^* は

$$v_y^* = \frac{v_y^+ \sqrt{4\pi\rho^+} + v_y^- \sqrt{4\pi\rho^-} - B_y^+ + B_y^-}{\sqrt{4\pi\rho^+} + \sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (15)$$

$$B_y^* = \frac{-v_y^+ + v_y^- + B_y^+ / \sqrt{4\pi\rho^+} + B_y^- / \sqrt{4\pi\rho^-}}{1/\sqrt{4\pi\rho^+} + 1/\sqrt{4\pi\rho^-}} \quad (16)$$

の様に求める事が出来る。簡単の為、 $\rho^+ = \rho_{i-1}^n$, $\rho^- = \rho_{i+1}^n$ とする。

始点の値 $f(= B_y, v_y)^\pm$ は、式 (12) を見ても分かるように移流の形をしているので、格子間を補間して求める事が出来る。補間方法には様々あるが、例えば van Leer の方法 ($i - 1/2$ と $i + 1/2$ を直線補間する方法) では

$$f(= B_y, v_y)^\pm = \begin{cases} f_i^n + \frac{1}{2}(\Delta x - C_{i+1/2}^\pm \Delta t) \frac{\Delta f}{\Delta x^{(i)}} & \text{if } C_{i+1/2}^\pm > 0 \\ f_{i+1}^n - \frac{1}{2}(\Delta x + C_{i+1/2}^\pm \Delta t) \frac{\Delta f}{\Delta x^{(i+1)}} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで、

$$\frac{\Delta f}{\Delta x^{(i)}} = \begin{cases} \frac{2\Delta f_{i-1/2}\Delta f_{i+1/2}}{\Delta f_{i-1/2} + \Delta f_{i+1/2}} & \text{if } \Delta f_{i-1/2}\Delta f_{i+1/2} > 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

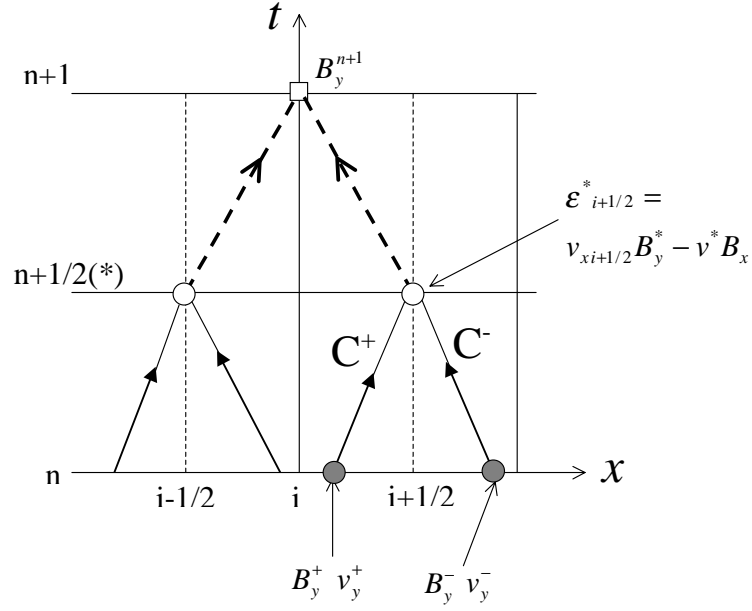


図 2: アルフベン波特性曲線と磁場の時間発展。実線矢印：特性曲線により起電力を求める。点線矢印：式 (8) を用いて B_y の時間発展を行なう。

$\Delta f_{i+1/2} = (f_{i+1} - f_i) / \Delta x$ である。この補間方法にも CIP 法を適用する事も出来る。

2.2 多次元、CT 法

前節は 1 次元の場合だが、そのまま多次元に拡張する事も出来る。例えば 2 次元では磁場の各成分は

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \quad (17)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \quad (18)$$

$$\varepsilon = -(v_x B_y - v_y B_x) \quad (19)$$

であるが、各物理量の配置は図 3 の様にする。スタガード格子なので、スカラー量は格子中心、ベクトル量は格子境界、また起電力 ε は格子の角に配置する。この様にすれば 1 次元の手法を用いて X 方向で B_y, v_y 、Y 方向で B_x, v_x を求め、式 (19) の ε が求まり、式 (17),(18) を差分化した式

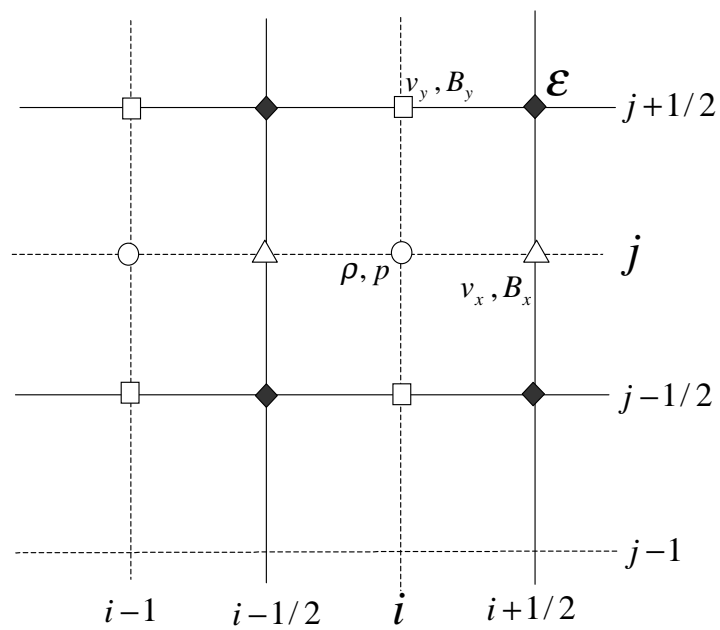


図 3: 2 次元 MHD コードでの物理量の配置、CT 法

$$\frac{B_{x(i+1/2,j)}^{n+1} - B_{x(i+1/2,j)}^n}{\Delta t} = - \frac{\varepsilon_{(i+1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \varepsilon_{(i+1/2,j-1/2)}^{n+1/2}}{\Delta y} \quad (20)$$

$$\frac{B_{y(i,j+1/2)}^{n+1} - B_{y(i,j+1/2)}^n}{\Delta t} = \frac{\varepsilon_{(i+1/2,j+1/2)}^{n+1/2} - \varepsilon_{(i-1/2,j+1/2)}^{n+1/2}}{\Delta x} \quad (21)$$

で磁場が時間発展される。これは 3 次元でも同様に拡張が出来る。

図 3 の様に物理量を配置する方法を CT 法と呼ぶが、この様に磁場と電場を異なる場所で定義すると、式 (20),(21) を用いて、初期条件で $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ が満たされていれば常に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ になる事が示される [4]。

この事から分かるように、CT 法は単に $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ を保証する手法であり、電場 ε の求め方の規定はしていない。これに MOC 法を組み合わせる事で安定なスキームになっている。

2.3 運動方程式中の磁気ストレス項

運動方程式の右辺にも磁気ストレス項が存在するが、この項にも MOC 法を用いて値を評価する事になる。例えば、2 次元 MHD の運動方程式の y 成分は次式である。

$$\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial y} \left(p + \frac{B_x^2}{8\pi} \right) + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial x} \quad (22)$$

この内、磁気圧項（右辺第 1 項）は圧力と同様の差分を作ればよいが、第 2 項はストレス項でありこの項に MOC 法を適用する。非移流相において第 2 項の差分のみ表記すると

$$\begin{aligned} & \frac{(v_y)_{i,j+1/2}^* - (v_y)_{i,j+1/2}^n}{\Delta t} = \dots \\ & + \left(\frac{1}{4\pi\bar{\rho}} \right) \langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n \frac{(B_y)_{i+1/2,j+1/2}^* - (B_y)_{i-1/2,j+1/2}^*}{\Delta x} \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 $\bar{\rho}, \langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n$ はそれぞれ v_y の定義点 $(i, j + 1/2)$ 上での平均値である。例えば

$$\langle B_x \rangle_{i,j+1/2}^n = \frac{1}{4} [(B_x)_{i+1/2,j} + (B_x)_{i+1/2,j+1} + (B_x)_{i-1/2,j} + (B_x)_{i-1/2,j+1}] \quad (24)$$

等である。式 (23) における、 B_y^* の値の見積りに MOC 法を用いる。しかし、この計算は非移流相の計算であり、移流部分は CIP 法で別に計算する事になるので特性速度は

$$C^\pm = \pm \frac{B_x}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (25)$$

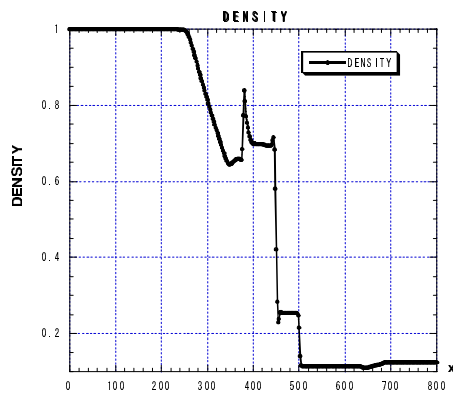
を用いて計算する。(式 (11),(12) は移流項も含めて特性線を出していた))
これは運動方程式の x 成分も同様に計算を行なう。

2.4 計算手順

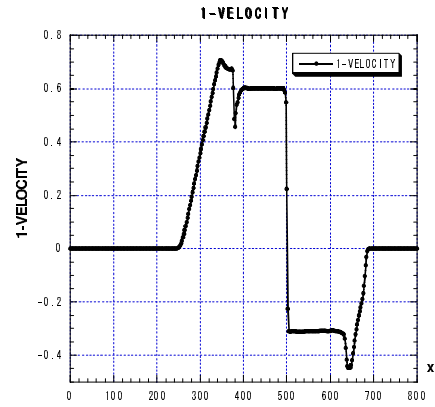
CIP 法と MOCCT 法をまとめた手順は次の様になる。

1. 初期条件 ($\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n, \mathbf{B}^n$) を設定。
2. 非移流項の計算 ($\rho^n, \mathbf{u}^n, p^n \rightarrow \rho^*, \mathbf{u}^*, p^*$)
 - (a) この時、運動方程式のストレス項の計算は MOC 法で求める。(式 (23) ~ (25))
3. 移流相と磁場の時間発展
 - (a) CIP 法で ρ, \mathbf{u}, p の移流相の計算を行なう。 $(\rho^*, \mathbf{u}^*, p^*) \rightarrow (\rho^{n+1}, \mathbf{u}^{n+1}, p^{n+1})$
 - (b) MOC 法で電場 ε を計算し、CT 法で磁場 \mathbf{B}^{n+1} を計算。(式 (20),(21))
4. 以下、繰り返し

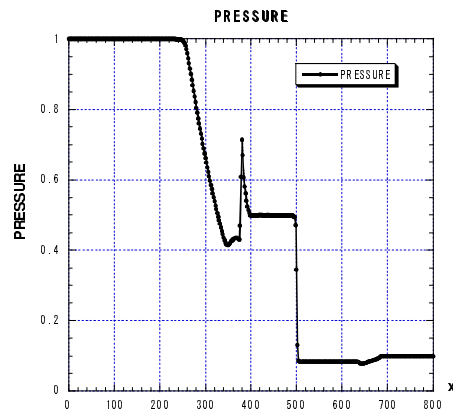
典型的な計算例として、1.5 次元衝撃波管問題の計算例を CIP-MOCCT 法で解いた結果を示す。1.5 次元なので磁場・速度の y 成分はあるが、 $\partial/\partial y = 0$ である (勿論、z 成分は値・微分共に 0)。初期条件は $p = 1, \rho = 1, B_y = 1.0$ ($x < 400$), $p = 0.1, \rho = 0.125, B_y = -1.0$ ($x > 400$)。比熱比 $\gamma = 1.4$ 、格子幅 $\Delta x = 2.0$ とし、 $t = 80.0$ の結果を示す。人工粘性係数は 0.7 である。



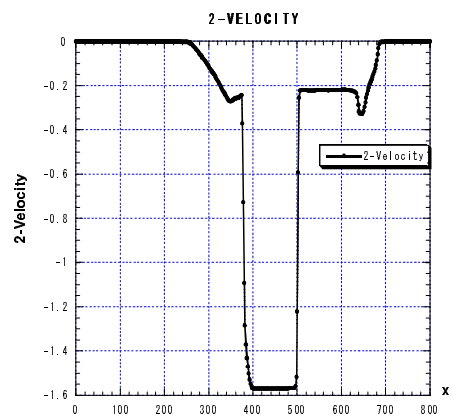
密度



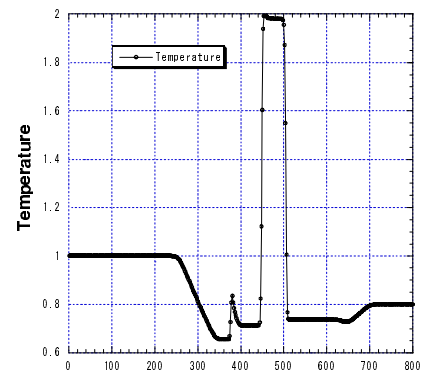
X 方向速度



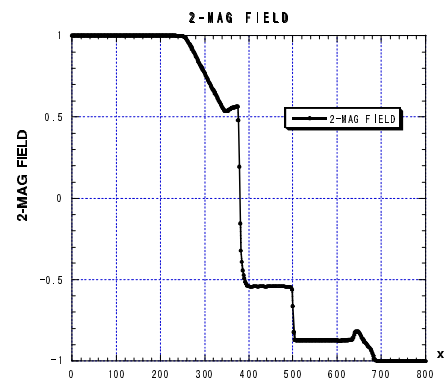
压力



Y 方向速度



温度



磁場 Y 成分

圖 4: 1 次元 MHD 衝擊波管問題。

参考文献

- [1] T.Kudoh and K.Shibata, Numerical MHD Simulation of Astrophysical Problems by Using CIP-MOCCT Method; *CFD Journal*,**8**, 56 (1999)
- [2] T.Kudoh and K.Shibata, Alfven Wave Model of Sppicules and Coronal Heating, *Astrophysical Journal*,**514**,493 (1999)
- [3] T.Kudoh and K.Shibata, Magnetically Driven Jets from Accretion Disks. II. Nonsteady Solutions and Comparison with Steady Solutions, *Astrophysical Journal*,**476**,612 (1997)
- [4] J.F.Hawley and J.M.Stone, MOCCT: A Numerical technique for astrophysical MHD, *Comput.Phys.Commun*,**89**,127 (1995)