第3章　ハイブリッドシミュレーション法

3.1　定式化

電子とイオンの特徴的な運動時間、空間を比べた場合、はるかに、電子の方が、速く、短い。そこで、注目するプラズマ現象が、イオンによって主に生じていると分かっている場合、すなわち、現象の時間と空間スケールがイオンの運動程度と分かっている場合は、電子の運動論的効果を陽に解かないシミュレーションを行うことができる。この手法を、ハイブリッド (HYBRID) 法と呼ぶ。そこでは、イオンを粒子で扱う一方、電子を電荷中性を瞬時に行う流体として扱う。瞬時に行うためには、慣性を持ってはならないので電子の質量は0となり、光速は無限大となる。式で表すと、

$$\rho_e = \sum_{i=ion} \rho_i \tag{3.1}$$

$$\frac{M_p}{m_e} \rightarrow \infty \tag{3.2}$$

$$\frac{c}{V_A} \rightarrow \infty \tag{3.3}$$

まず、ハイブリッド法で用いる方程式系を導入するために Maxwell 方程式 (2.1 - 2.2) と次の電子流体要素に対する運動方程式の規格化を行う。

$$m_e N_e \frac{d\boldsymbol{V_e}}{dt} = -eN_e(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{V_e} \times \boldsymbol{B}) - \nabla \boldsymbol{P_e} \tag{3.4}$$

規格化定数は、

速度	$\boldsymbol{V}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{V}}\, V_A$
時間	t	$\rightarrow$	$\frac{\tilde{t}}{\Omega_i}$
長さ	x	$\rightarrow$	$\tilde{t}\, \frac{V_A}{\Omega_i}$
磁場	$\boldsymbol{B}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{B}}\, B_0$
電場	$\boldsymbol{E}$	$\rightarrow$	$\tilde{\boldsymbol{E}}\, V_A B_0$

密度	ρ	$\rightarrow$	$\tilde{\rho}\,\rho_0$
圧力	P	$\rightarrow$	$\tilde{P}\,\frac{B_0^2}{2\mu_0}$

を用いる。Maxwell 方程式 (2.1 - 2.2) を規格化すると、

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{E}}}{\partial \tilde{t}} = (\frac{c}{V_A})^2(\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} - \tilde{\boldsymbol{J}}) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial \tilde{\boldsymbol{B}}}{\partial \tilde{t}} = -\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{E}} \tag{3.6}$$

となり、式 (3.5) において、式 (3.3) を満足し、かつ、左辺が有限値になるためには、

$$\tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}} - \tilde{\boldsymbol{J}} = 0 \tag{3.7}$$

でなければならない。
電流は、

$$\tilde{\boldsymbol{J}} = \sum \tilde{\rho}_i \tilde{\boldsymbol{V_i}} \tag{3.8}$$

$$= \tilde{N}_e \tilde{\boldsymbol{V_e}} + \sum_{ion} \tilde{\rho}_i \tilde{\boldsymbol{V_i}} \tag{3.9}$$

と定義されるため、電子の流体速度は、式 (3.7) を使って、

$$\tilde{\boldsymbol{V_e}} = (\tilde{\boldsymbol{J}} - \sum_{ion} \tilde{\rho}_i \tilde{\boldsymbol{V_i}})/\tilde{N}_e = \frac{1}{\tilde{N}_e}(\sum_{ion} \tilde{\rho}_i \tilde{\boldsymbol{V_i}} - \tilde{\nabla} \times \tilde{\boldsymbol{B}}) \tag{3.10}$$

と求まる。
次に電子流体の運動方程式は、

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{V_e}}}{d\tilde{t}} = -(\frac{\tilde{M}_p}{\tilde{m}_e})(\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{V_e}} \times \tilde{\boldsymbol{B}} + \frac{1}{2\tilde{N}_e}\tilde{\nabla}\tilde{P}_e) \tag{3.11}$$

となり、式 (3.2) を満足し、かつ、左辺が有限値になるためには、

$$\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{V_e}} \times \tilde{\boldsymbol{B}} + \frac{1}{2\tilde{N}_e}\tilde{\nabla}\tilde{P}_e = 0 \tag{3.12}$$

でなければならない。
したがって、電場は、

$$\tilde{\boldsymbol{E}} = -\tilde{\boldsymbol{V_e}} \times \tilde{\boldsymbol{B}} - \frac{1}{2\tilde{N}_e}\tilde{\nabla}\tilde{P}_e \tag{3.13}$$

と求まる。
つまり、電子の流体速度と電場の値は、時間積分を行い求めるのではなく、各時

間で、他の変数から求める。
電子の圧力勾配は、状態方程式から求める。例えば、断熱変化を仮定した場合、比熱比 γ を用いて

$$\tilde{P}_e \tilde{N}_e^{-\gamma} = const. \tag{3.14}$$

から求める。イオンの各粒子については、以下の運動方程式を解く。

$$\frac{d\tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}{}^{\sharp}}{d\tilde{t}} = (\frac{\tilde{Z}_i}{\tilde{M}_i})(\tilde{\boldsymbol{E}} + \tilde{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{i}}{}^{\sharp} \times \tilde{\boldsymbol{B}}) \tag{3.15}$$

まとめると、解き進めて行く方程式は、(以降、〜記号を省略)

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3.16}$$

$$\boldsymbol{E} = -\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}} \times \boldsymbol{B} - \frac{1}{2N_e}\nabla P_e \tag{3.17}$$

$$\boldsymbol{V}_{\boldsymbol{e}} = \frac{1}{N_e}(\sum_{ion} \rho_i \boldsymbol{V}_i - \nabla \times \boldsymbol{B}) \tag{3.18}$$

$$N_e = \sum_{ion} \rho_i \tag{3.19}$$

$$\frac{d\boldsymbol{v}_i{}^{\sharp}}{dt} = (\frac{Z_i}{M_i})(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_{\boldsymbol{i}}{}^{\sharp} \times \boldsymbol{B}) \tag{3.20}$$

である。
$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{V}$、$\boldsymbol{P}_e$、$\boldsymbol{N}$ は、空間上に定義したグリッド上でのみ定義される。また、Full-Particle 計算の時のような半グリッドずらした場所での変数の定義は無い。

3.2 タイムチャート

まず、時間 $t^n = n\Delta t$ で、粒子の位置 x^n、グリッド上での磁場 $B^n(j)$、イオンの密度 $N_i^n(j)$ が分かっていて、$t^{n+1/2} = (n+1/2)\Delta t$ で粒子の速度 $v^{n+1/2}$ が分かっていたとする。ここで、j は、グリッド位置 $j\Delta x$ を表すとする。leap-frog 法でイオン粒子を時間的に進めるため、イオン粒子の位置と速度の情報は、時間的にずれて定義する。

STEP 1: $t = t^n$ でのグリッド上でのイオンフラックス $F_1^n(j)$ を求める。

$$F_1^n(j) = v^{n+1/2} \sum_{\sharp} S(x^n - X(j)) \tag{3.21}$$

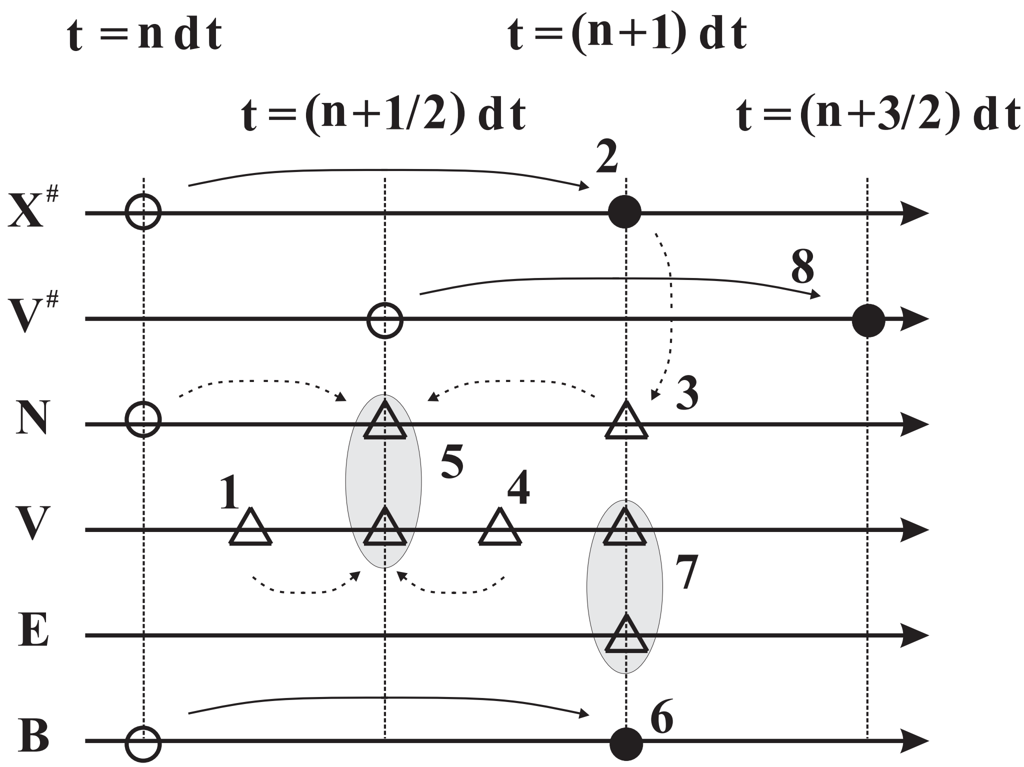

図 3.1: 時間の進め方。○の時間での値は既知。●の値は、○から時間を進めることによって求める。△の値は、他の量から求める。

STEP 2: 粒子の位置を進める。

$$x^{n+1} = x^n + v^{n+1/2}\Delta t \tag{3.22}$$

STEP 3 & 4: $t = t^{n+1}$ でのグリッド上でのイオンの数密度とフラックスを求める。

$$N^{n+1}(j) = \sum_{\sharp} S(x^{n+1} - X(j)) \tag{3.23}$$

$$F_2^{n+1}(j) = v^{n+1/2} \sum_{\sharp} S(x^{n+1} - X(j)) \tag{3.24}$$

STEP 5: $t = t^{n+1/2}$ でのイオンの数密度、速度、イオン電流を求める。

$$N^{n+1/2} = (N^n + N^{n+1})/2 \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{V}^{n+1/2} = (F_1^n + F_2^{n+1})/(2N_i^{n+1/2}) \tag{3.26}$$

$$\boldsymbol{J}^{n+1/2} = \sum_{ion} Z_i N^{n+1/2} \boldsymbol{V}^{n+1/2} \tag{3.27}$$

STEP 6: 磁場を進める。後述の有理ルンゲクッタ法を使う。

$$\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} = -\nabla \times \boldsymbol{E} \tag{3.28}$$

STEP 7 & 8: 粒子の速度を進める。

$$\frac{v^{n+3/2} - v^{n+1/2}}{\Delta t} = \boldsymbol{E}'^{n+1} + \frac{v^{n+3/2} + v^{n+1/2}}{2} \times \boldsymbol{B}'^{n+1} \tag{3.29}$$

ここで、

$$\boldsymbol{E}'^{n+1}(j) = \sum_i \boldsymbol{E}^{n+1} S(x^{n+1} - X(j)) \tag{3.30}$$

$$\boldsymbol{B}'^{n+1}(j) = \sum_i \boldsymbol{B}^{n+1} S(x^{n+1} - X(j)) \tag{3.31}$$

は、粒子の存在する位置での電場と磁場の値である。
また、$\boldsymbol{E}^{n+1}$ は、

$$\boldsymbol{E}^{n+1} = -\boldsymbol{V}_e^{n+1} \times \boldsymbol{B}^{n+1} - \frac{1}{2N_e}\nabla P_e \tag{3.32}$$

$$= -\frac{1}{N_e}(\sum_{ion} Z_i N_i^{n+1} \boldsymbol{V}_i^{n+1} - \nabla \times \boldsymbol{B}^{n+1}) - \frac{1}{2N_e}\nabla P_e \tag{3.33}$$

から求め、V_i^{n+1} は

$$\boldsymbol{V}_i^{n+1} = a_1 \boldsymbol{V}_i^{n+1/2} + a_2 \boldsymbol{V}_i^{n-1/2} + a_3 \boldsymbol{V}_i^{n-3/2} + a_4 \boldsymbol{V}_i^{n-5/2} \tag{3.34}$$

$$a_1 = 55/24, \quad a_2 = -59/24, \quad a_3 = 37/24, \quad a_4 = -9/24 \tag{3.35}$$

から求める。

3.3　有理ルンゲクッタ法 (Rational Runge Kutta method)

Wambecq によって提案された非線形のルンゲクッタ型積分法で、

$$\frac{d\boldsymbol{y}}{dt'} = f(\boldsymbol{y}, t') \tag{3.36}$$

のような時間に関する微分方程式においては、次式で表される。(２次精度の場合)

$$\boldsymbol{g}_1 = f(\boldsymbol{y}, t') \tag{3.37}$$

$$\boldsymbol{g}_2 = f(\boldsymbol{y} + \frac{\Delta t'}{2}\boldsymbol{g}_1, t' + \Delta t') \tag{3.38}$$

$$\boldsymbol{g}_3 = 2\boldsymbol{g}_1 - \boldsymbol{g}_2 \tag{3.39}$$

全グリッドでの値の内積和を以下のように求め、

$$G_{11} = \sum_j (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_1) \tag{3.40}$$

$$G_{33} = \sum_j (\boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_3) \tag{3.41}$$

$$G_{13} = \sum_j (\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_3) \tag{3.42}$$

これらを使って、$\Delta t'$ 時間を進める。

$$\boldsymbol{y}^{new} = \boldsymbol{y}^{old} + \Delta t' \frac{2G_{13}\boldsymbol{g}_1 - G_{11}\boldsymbol{g}_3}{G_{33}} \tag{3.43}$$

この時の時間ステップ $\Delta t'$ は、シミュレーションの時間ステップ Δt とは独立であるため、必要に応じて細かくとることができる。(例：$\Delta t' = \Delta t/4$)