

第4章 粒子モデルシミュレーション 基本課題

本シミュレーションスクールでは実習課題を用意している。本来なら、宇宙空間またはチャンバー装置内でしか再現できないようなプラズマ現象を計算機内でバーチャルに実現することができ、その解析を自ら行うことにより、シミュレーションの有用性について実感していただけると幸いである。特に、粒子モデルでは、ビーム-プラズマ不安定性および衝撃波現象に関する基本課題を用意しており、各受講者はそれぞれの端末で基本課題に関するシミュレーションを実体験することができる。これらの基本課題は、非常に古典的な問題であるにもかかわらず、それぞれの現象の時空間発展はプラズマパラメータに大きく依存する。このため、観測、理論、シミュレーションを含めて現在でも非常にホットで最先端の研究テーマでもある。自習時間では、基本課題を元にした応用課題に是非取り組んでいただきたい。

4.1 電磁粒子シミュレーションで解く課題

4.1.1 ビームプラズマ不安定性

近年、衛星を用いた地球磁気圏プラズマ波動観測により様々なプラズマ波動が観測されている。これらのプラズマ波動の形成要因として考えられているもの1つにビームプラズマ不安定性がある。ビームとは、背景プラズマに対して相対速度を持ったイオンや電子の流れのことを示す。ビーム成分と背景プラズマとの相互作用は非常に古典的な問題であり、理論的には1940年代から研究されてきている。その後、計算機シミュレーションによりその線形過程および初期の非線形過程について様々な研究が行われてきた。近年では、静電孤立波の衛星観測に伴い、ビーム-プラズマ相互作用の非線形発展に関する計算機シミュレーション研究が注目を浴びている。

このような研究背景の中、本基本課題では、特に不安定性の線形発展から非線形過程にいたるプロセスに着目し、背景プラズマにビームとなる成分を加えたモ

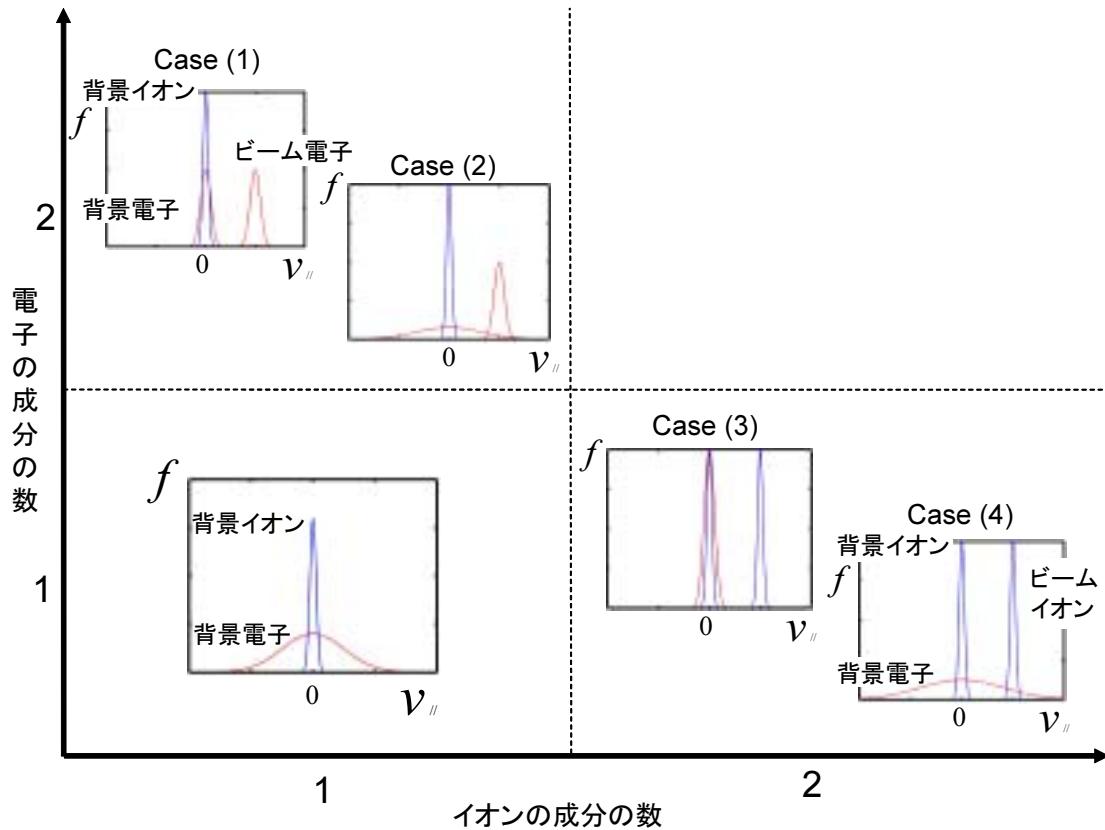


図 4.1: 電子及びイオンの速度分布とビーム不安定性

モデルを用いて、計算機シミュレーション実習を行う。実際のビームプラズマ不安定性では背景プラズマとビームの熱速度、質量比、密度比またはビームの相対速度などにその発展は大きく依存する。しかし基本的には電子-電子間、電子-イオン間そしてイオン-イオン間での生じる不安定性の組み合わによりある程度理解することができる。そこで今回、基本課題として、電子またはイオンのビームが1つだけ存在する場合に生じる電子-電子間、電子-イオン間そしてイオン-イオン間の不安定性の特徴的な場合について計算機シミュレーションを行ってみる。

背景プラズマと電子ビーム

静止系において背景プラズマ(電子とイオン)が存在し、加えてビーム電子が存在する場合について考える。この時起りうる不安定性としては、(1) 背景電子-ビーム電子間の電子二流体不安定性と(2) 背景イオン-ビーム電子間のBuneman不安定性の2種類が考えられる。どちらの不安定性が支配的になるかは、各成分の熱

速度、質量比、密度比またビームの相対速度などにより決まるが、本基本課題では背景電子の熱速度にのみ注目することにする。

- Case (1) : 背景電子の温度が低い場合 (電子二流体不安定性)

背景電子の温度が低い場合、背景電子-ビーム電子間の不安定性である電子二流体不安定性が支配的である。電子二流対不安定性とは電子-電子間で相対速度を持つ場合に生じる静電的な不安定性で、各電子が自らの運動エネルギーを電場に与えより安定した速度分布に落ち着こうとして生じる。背景電子の温度が低い場合の代表的な速度分布を図に示す。図をみて分かるように背景電子の他に背景イオンも存在するが、電子の方がイオンより軽く動きやすいためにイオンより先にビーム電子と電子二流対不安定性を起し安定な状態に落ち着こうとする。課題としては、線形分散解析を予め行いどのような波数の波動が最も成長しやすいかを確認後、その波動を再現できるようなシミュレーションシステム・パラメータを選択し実際にシミュレーションを行う。シミュレーション結果を解析して、最大成長率をもつ波数、時間的な波動成長率などを理論値と比較する。

- Case (2) : 背景電子の温度が高い場合 (Buneman 不安定性)

背景電子の温度が高い場合、電子二流体不安定性は小さくなり背景イオン-ビーム電子間の Buneman 不安定性が支配的になる。Buneman 不安定性とは電子-イオン間で相対速度を持つ場合に生じる静電的な不安定性で、電流駆動型 (Current-driven) 不安定とも言われる。基本的にはイオン音波モードから静電波が成長するが、不安定性を起すイオンと電子の温度がその波の成長に関係する。すなわち、イオン温度と電子温度より決まるイオン音速がイオンの熱速度より小さい場合、イオンによるランダウ減衰が起り波の成長は妨げられる。背景電子の温度が高い場合の代表的な速度分布を図に示す。図をみて分かるように背景電子は熱速度が高く速度分布が広がっていて安定しているので背景電子-ビーム電子間の不安定性は小さい、しかし、背景イオンは熱速度が小さく、系全体から見た場合、背景イオンとビーム電子は不安定な状態にある。よって Buneman 不安定性が起り安定な状態に落ち着こうとする。

この場合についても前のケース同様の解析を行い、シミュレーション結果の解析を行う。

背景プラズマとイオンビーム

次に、静止系において背景プラズマとして電子とイオンが存在し、加えてビームイオンが存在する場合について考える。この時は上に述べた Buneman 不安定性と背景イオン-ビームイオン間のイオン二流体不安定性の 2 種類が考えられる。ここでも背景電子の熱速度にのみ注目して、それぞれの不安定性が支配的になる 2 つの場合について計算機シミュレーションを行ってみる。

- Case (3): 背景電子の温度が低い場合 (Buneman 不安定性)

背景電子の温度が低い場合、背景電子-ビームイオン間の Buneman 不安定性が支配的である。この時の代表的な速度分布を図に示す。この場合、系全体で見た場合、背景電子、イオンそしてビームイオンのすべてが不安定な状態にある。しかし電子はイオンより軽く動きやすいためよく安定な状態に移行しやすい、よって、背景イオン-ビームイオン間の不安定性より背景電子-ビームイオン間の Buneman 不安定性の方が早く起こり安定な状態に落ち着いてしまう。

この場合についても前のケース同様の解析を行い、シミュレーション結果の解析を行う。

- Case (4): 背景電子の温度が高い場合 (イオン二流体不安定性)

次に背景電子の温度が高い場合は、Buneman 不安定性が弱まり背景イオン-ビームイオン間の不安定性であるイオン二流体不安定性が支配的となる。イオン二流体不安定性とは、イオン-イオン間で相対速度を持つ場合に生じる静電的な不安定性で、各イオンが自らの運動エネルギーを電場に与えより安定した速度分布に落ち着こうとして起る不安定性である。この場合の代表的な速度分布を図に示す。見て分かるように背景電子は熱速度が大きく速度分布が広がっており、系全体見た場合ビームイオンと背景電子の不安定性は小さい。よって背景イオンとビームイオン間のイオン二流体不安定性が一番強くなる。イオン二流体不安定性は他の 2 つの場合と違い両方イオンなので最も成長率が小さく、波の成長に時間がかかり長い計算時間をする。

4.2 ハイブリッドシミュレーションで解く課題

本スクールでは、ハイブリッド法で解析されるプラズマ現象として、イオン二流体不安定性と Fast Mode の衝撃波を扱う。また、簡単のために空間 1 次元 (X 方向の変化のみ) の仮定の基で行う。粒子の速度は 3 成分を扱う。

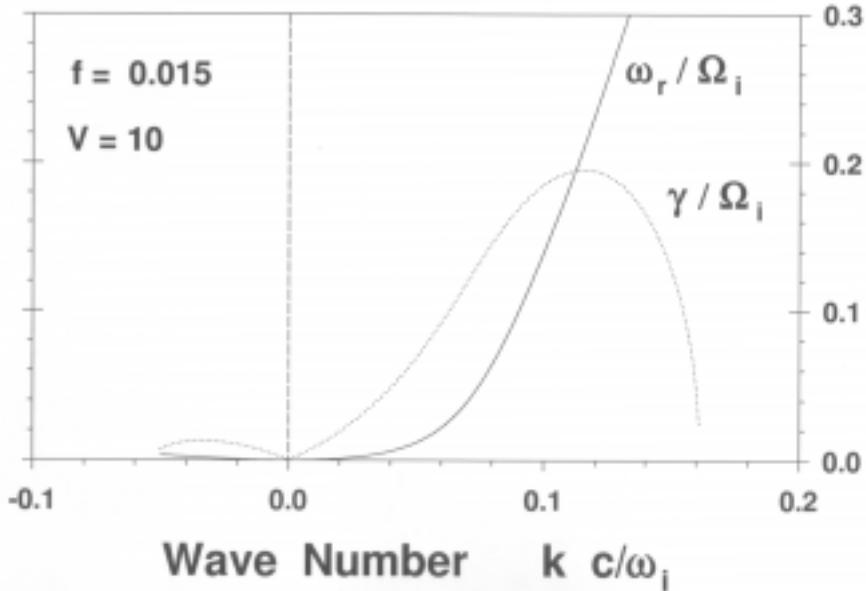


図 4.2: イオン二流体不安定性に関する分散曲線。実線が周波数、破線が成長率を表す。時間と長さは、それぞれプロトンのサイクロトロン角周波数 Ω_i とプロトンの慣性長 V_A/Ω_i で規格化してある。 Ω_i よりもゆっくりした波動で、成長率も静電的波動に比べて小さい。

4.2.1 イオン二流体不安定性

背景イオンと電子が存在する系に、イオンビームが加わる場合を考える。先の粒子コードによって解析した静電的な波動の励起に加え、図 4.2 の分散関係に見られるような、電磁的な波動も励起される。しかし、この電磁的な波動は、静電的な波動に比べ波の成長率が極端に小さいため、粒子コードを長時間走らさなければならない。昨今のコンピューターの能力では、この長時間の計算を行うことは可能だが、この現象がイオンの時間スケールで生じる現象と分かっているため、ハイブリッドコードで解析することが可能であり、また短時間で行える。宇宙空間でこのような現象が人工衛星によって直接観測される場所としては、地球の定在衝撃波 (Bow Shock) 近傍や、地球磁気圏尾部のプラズマシート境界などがある。そこでは、背景プラズマに対し、磁力線に沿った方向にイオンビームが流れている現象が観測され、同時に電磁的な波動も観測されている。

問題

- (1) 分散曲線の図で、 $k > 0$ の波 (共鳴波と呼ばれる) の方が、 $k < 0$ の波 (非共

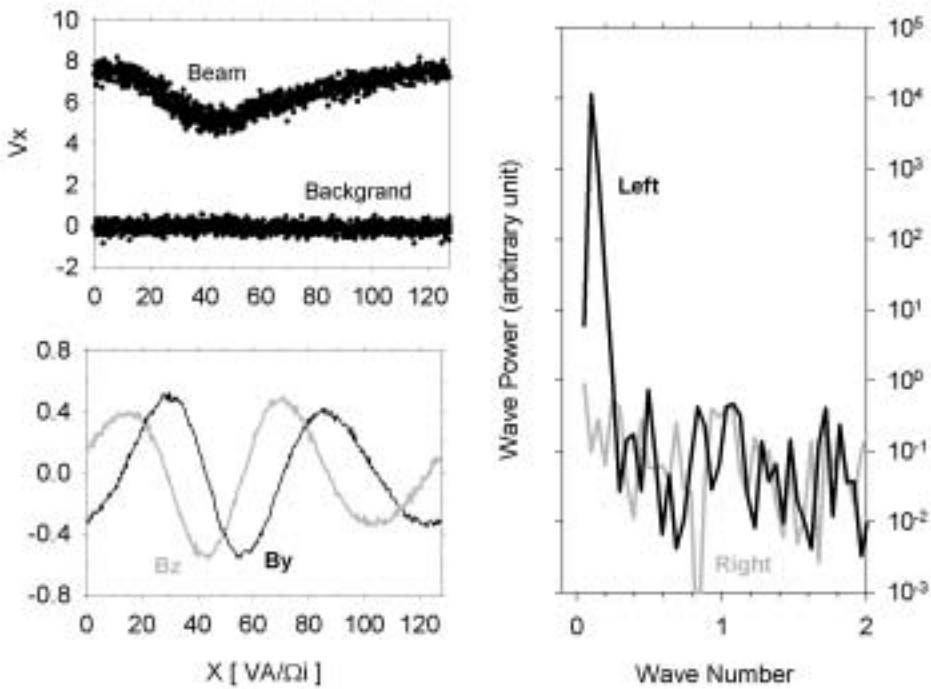


図 4.3: 波が成長してきた時点での、 $X - V_x$ 位相空間図 (左上)、磁場の垂直 2 成分の空間変化図 (左下) とそのスペクトル図 (右)。空間的に左周りの波が励起されている。

鳴波) より成長率が大きいが、どのような時に逆転するか?

- (2) ビームの速度や密度を変えて行くと、励起される波のモードがどのように変化するか?
- (3) テスト粒子計算の時にいったん位相捕捉現象が見られるだろうか?

4.2.2 Fast Mode 衝撃波

衝撃波面での散逸現象

粒子間の衝突が無視できる宇宙空間においては、衝撃波の存在は自明ではない。なぜなら、衝撃波面での散逸現象が粒子間の衝突に起因しないからである。如何にして、運動エネルギーが熱エネルギーに変換されているのであろうか。その散

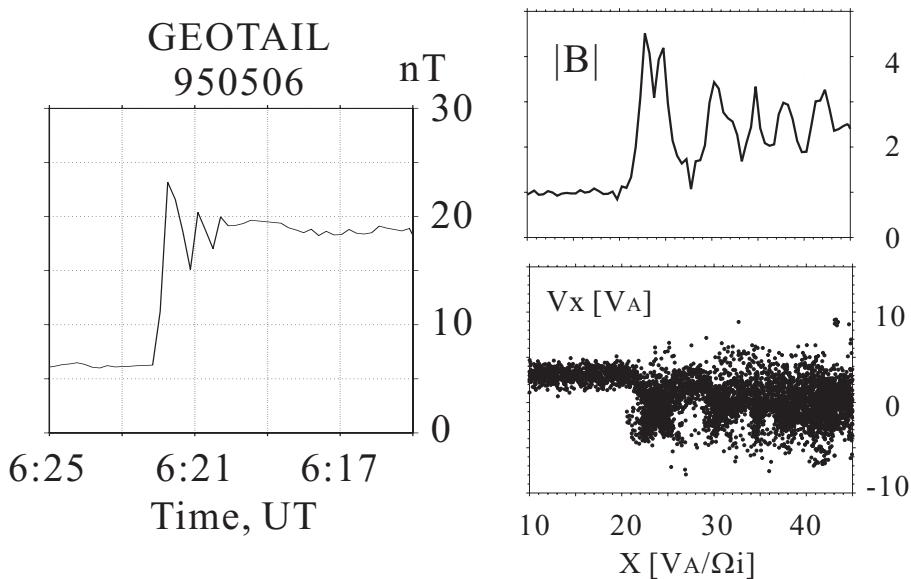


図 4.4: 人工衛星によって観測された衝撃波の例 (左: 磁場強度) とハイブリッド法で計算された衝撃波 (右上: 磁場強度、右下: 位相空間図)。

逸の様子を、シミュレーションで理解することを目標とする。

問題

- (1) Rankine-Hugoniot の関係式を使って、下流での熱量を求める。
- (2) 衝撃波の法線方向 (x 軸) と磁場の成す角 (Shock 角) を変えることにより衝撃波の性質が変わることを確認する。
- (3) 衝撃波面から、上流方向へ移動する粒子があることを確認する。
- (4) Shock 角が小さいとき (< 45 度)、上流で、イオン二流体不安定性が見られるることを確認する。

衝撃波面での加速現象

衝撃波は、また、プラズマ粒子の加速器として働くことが良く知られている。しかし、全ての粒子を加速しているわけではない。加速される粒子とされない粒子は、何が違うのであろうか。

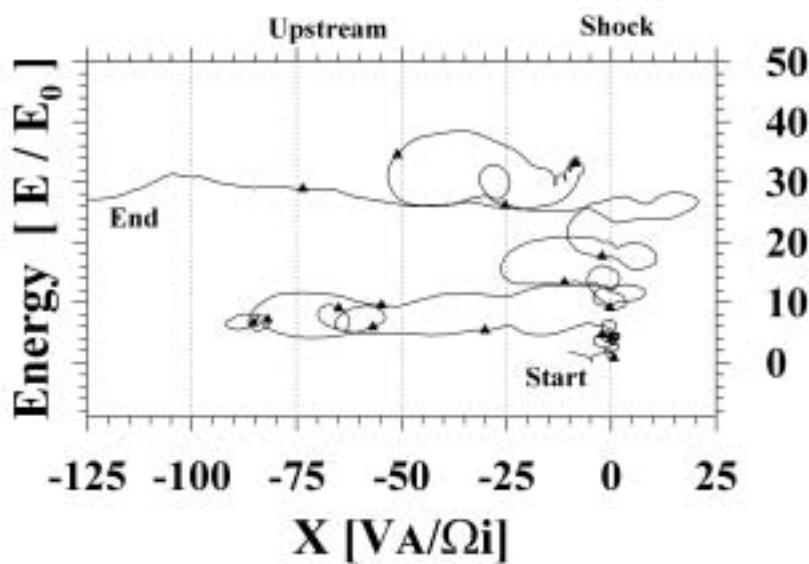


図 4.5: 準平行衝撃波で、上流からやって来た粒子が衝撃波面で止められ加速されて行く様子を示す(ハイブリッド法による計算結果から)。点は、 $2\pi\Omega_i$ 時間毎に打ってある。

参考文献

- [1] Birdsall, C. K, and A. B. Langdon, *Plasma physics via computer simulation*, McCraw-Hill, 1985.
- [2] Hockney, R. W., and J. W. Eastwood, *Computer simulation using particles*, McGraw-Hill, 1981.
- [3] Matsumoto, H., and Y. Omura, *Particle simulations of electromagnetic waves and their applications to space plasmas*, *Computer simulations of space plasmas*, ed. by H. Matsumoto and T. Sato, Terra Pub. and Reidel Co., 1985.
- [4] Matsumoto, H., and Y. Omura, *Computer space plasma physics: Simulation techniques and software*, ed. by H. Matsumoto and Y. Omura, Terra Pub., 1993.
- [5] Villasenor, J. and O. Buneman, Rigorous charge conservation for local electromagnetic field solvers, *Computer Physics Communication*, 69, 306-316, 1992.
- [6] William H. Press, Saul A. Teukolsky, William T. Vetterling, Brian P. Flannery *Numerical Recipes in C*, 技術評論社、1998年
- [7] Fujimoto, M., Instabilities in the Magnetopause Velocity Shear Layer, PhD thesis, Institute of Space and Astronautical Science, Kanagawa, Japan, 1992

粒子モデルの基本実習課題に関連する参考図書も以下にあげる。

1. Nicholson, D. R., *Introduction to plasma theory*, John Wiley & Sons, 1983.
2. Melrose, D. B., *Instabilities in space and laboratory plasmas*, Cambridge Univ. Press, 1986.

付録A クーラン条件

Maxwell 方程式を空間的に中心差分、時間的にリープフロッギで解き進めるには、上述にあるように格子間隔 Δx と時間ステップ Δt が以下の関係を満足する必要がある。

$$\Delta x > c\Delta t \quad (A.1)$$

ここで c は光速である。これをクーラン条件という。このクーラン条件は光速波動の数値分散関係から簡単に導かれる。今、 $A(x, t)$ を波数 k 周波数 ω を持つ波の成分と仮定する。

$$A(x, t) = A_0 \exp(ikx - i\omega t) \quad (A.2)$$

空間的な中心差分を考えると

$$\frac{\Delta A}{\Delta x} = \frac{A(x_0 + \Delta x/2, t) - A(x_0 - \Delta x/2, t)}{\Delta x} \quad (A.3)$$

$$= \frac{\exp(ik\Delta x/2) - \exp(-ik\Delta x/2)}{\Delta x} A(x_0, t) \quad (A.4)$$

$$= i \frac{\sin(k\Delta x/2)}{\Delta x/2} A(x_0, t) \quad (A.5)$$

この $\Delta A/\Delta x$ を空間変微分 $\partial A/\partial x$ と比較すると、波数 k は以下のように変数 K に置き換えて考えることができる。

$$K = \frac{\sin(k\Delta x/2)}{\Delta x/2} \quad (A.6)$$

同じように周波数 ω についても変数 Ω 以下のように置き換えることができる。

$$\Omega = \frac{\sin(\omega\Delta t/2)}{\Delta t/2} \quad (A.7)$$

光速モードの波動分散関係は $\omega^2 = c^2 k^2$ であり、 k と ω を上の K と Ω で置き換えると $\Omega^2 = c^2 K^2$ となる。最大波数 $k_{max} = \pi/\Delta x$ を考えた場合、

$$\sin^2(\omega\Delta t/2) = \left(\frac{c\Delta t}{\Delta x}\right)^2 \quad (A.8)$$

という関係が得られる。もし $c\Delta t/\Delta x < 1$ なら、 ω は複素数となり数値不安定を示す。このため、最初に示したクーラン条件が満たされてないといけないことがある。 $c\Delta t/\Delta x = 1$ の場合、臨界安定である。

付録B マクスウェル分布を与える方法

ここでは、 $0 < x < 1$ の一様乱数から、ガウス乱数を生成する方法の一例を述べる。粒子シミュレーションでは、初期の粒子の速度分布をマクスウェル分布で与えることが多いためである。

一様乱数 x

$$p(x)dx = \begin{cases} dx & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{other} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

を任意の関数で $y(x)$ に変換した場合、 $y(x)$ の確立密度 $P(y)$ は、

$$|P(y)dy| = |p(x)dx| \quad (\text{B.2})$$

となり、

$$P(y) = p(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| \quad (\text{B.3})$$

と求まる。これを、2次元に拡張すれば、

$$P(y_1, y_2)dy_1dy_2 = p(x_1, x_2) \left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| dy_1dy_2 \quad (\text{B.4})$$

となる。 $|\dots|$ は、 x の y についてのヤコビアンである。

もし、 $P(y)$ がガウス分布を表す確立密度関数になれば、目的が達成される。

2次元のガウス分布は、

$$f(\mathbf{v}) = \frac{1}{\pi \langle v \rangle^2} \exp\left(-\frac{v_x^2 + v_y^2}{\langle v \rangle^2}\right) \quad (\text{B.5})$$

であるから、式 (B.4) のヤコビアンが、

$$\left| \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(y_1, y_2)} \right| = \left[\frac{1}{\sqrt{\pi} \langle v \rangle} \exp\left(-\frac{y_1^2}{\langle v \rangle^2}\right) \right] \left[\frac{1}{\sqrt{\pi} \langle v \rangle} \exp\left(-\frac{y_2^2}{\langle v \rangle^2}\right) \right] \quad (\text{B.6})$$

となる変換関数があれば良い。

それは、

$$y_1 = V_x = \langle v \rangle \sqrt{-\ln(x_1)} \cos(2\pi x_2) \quad (B.7)$$

$$y_2 = V_y = \langle v \rangle \sqrt{-\ln(x_1)} \sin(2\pi x_2) \quad (B.8)$$

である。よって、2つの(0, 1)の範囲の一様乱数 x_1, x_2 が求まれば、式(B.7, B.8)の変換により、1組の2次元ガウス分布が求まる。